**PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

**§1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**

**I. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH**

Phương trình tích là phương trình có dạng $(ax+b) (cx+d) =0$.

 **Kiến thức cần nhớ**

Muốn giải phương trình $(ax+b) (cx+d) =0$, ta giải hai phương trình $ax+b=0$ và $cx+d=0$, rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:
a) $5x (x-6) =0$; b) $(9-x) (3x+8) =0$.

**Hướng dẫn giải:**

a) Ta có: $5x (x-6) =0$

$5x=0$ hoặc $x-6=0$

$x=0$ hoặc $x=6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$ và $x=6$.

b) Ta có: $(9-x) (3x+8) =0$

$9-x=0$ hoặc $3x+8=0$

$-x=-9$ hoặc $3x=-8$

$x=9$ hoặc $x=\frac{-8}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

là $x=9$ và $x=\frac{-8}{3}$.

 **Chú ý:** Trong nhiều trường hợp, để giải một phương trình, ta biến đổi để đưa phương trình đó về dạng phương trình tích.

**Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích:
a) $x^{2}-6x=0$; b) $(4x-5) ^{2}-9x^{2}=0$.

**Huớng dẫn giải:**

a) Ta có: $x^{2}-6x=0$

$$x (x-6) =0$$

$x=0$ hoặc $x-6=0$

$$x=0 hoặc x=6.  $$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$ và $x=6$.

b) Ta có: $(4x-5) ^{2}-9x^{2}=0$

$$ (4x-5-3x) (4x-5+3x) =0$$

$$ (x-5) (7x-5) =0$$

$x-5=0$ hoặc $7x-5=0$

$x=5$ hoặc $x=\frac{5}{7}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=5$ và $x=\frac{5}{7}$.

**Bài 1.** Giải các phương trình:

1. $9x^{2} (2x-3) =0$ 2.$ (x-1) (3x-6) =0$; 3. $(x+2) (3-3x) =0$;

4. $(2x-7) (x+13) =0$ 5. $(2x+3) (5-x) =0$; 6. $(3x-5) (2x+9) =0$

7. $(3x-2) (4x+5) =0$; 8. $(2x+5) (1-3x) =0$; 9. $(4x-10) (24+5x) =0$;

10. $\left(\frac{2}{3}x+6\right) (8-2x) =0$; 11. $(-2x+5) \left(\frac{3}{4}x-6\right)=0$; 12. $\left(2-\frac{5}{3}x\right) (2024x+2025) =0$;

13. $(3, 5-7x) (0, 1x+2, 3) =0$; 14. $(2, 3x-6, 9) (0, 1x+2) =0$; 15. $(4x+2) \left(x^{2}+1\right)=0$;

16. $(3x-4) (x+1) (2x-1) =0$; 17. $6 (x-2) (x-4) (1-7x) =0$; 18. $(x+1) ^{2} (x+2) =0$

19. $(3x-2) ^{2} (x+1) (x-2) =0$; 20. $(5-x) ^{2} (3x-1) =0$; 21. $(14-2x) ^{2} (3-x) (2x-4) =0$;

22. $(3x-3) ^{3} (x+4) =0$ 23. $(2x-1) ^{3} (4x+5) =0$ 24. $(8-x) ^{3} (3x+6) =0$.

**Bài 2.** Giải các phương trình:

1. $(2x+3) ^{2}= (x-5) ^{2}$ 2. $4x^{2}-1= (2x+1) (3x-5)$;

3. $(x-3) ^{2}-9+x^{2}= (x-3) (x+1)$; 4. $(2x+5) ^{2}-25+4x^{2}= (2x+5) (5-9x) $

5. $3x (x-5) +6 (x-5) =0$; 6. $2x (x+7) +9 (x+7) =0$;

7. $x (2x-1) +5 (2x-1) =0$ 8. $(2x-5) (x+7) =x (x+7) $

9. $(3x-2) ^{2}-25=0$; 10. $x (3x+5) -6x-10=0$

11.$ (x-1) ^{2}+4x-4=0$ 12. $(x-4) ^{2}=5x-20$

13. $(2-3x) (x+11) = (3x-2) (2-5x)$; 14. $(2x-1) ^{2}+ (2-x) (2x-1) =0$;

15. $2 (3x+1) ^{2}= (3x+1) (x-2)$; 16. $-5 (4x-1) (x-2) =2 (4x-1) ^{2}$;

17. $(2x-1) (5x-7) = (2x-1) (9-7x)$; 18. $(x-2) (7-3x) = (3x-7) (8x+32)$;

19. $(2-x) (x+1) = (x-2) (3x+5) $ 20. $(x-1) (x+7) = (1-x) (3-2x)$;

21. $(6x-7) (3x+4) = (7-6x) (x-1)$; 22. $(2x-3) (5x+1) = (3-2x) (x-5)$;

23. $\left(2x^{2}+1\right) (4x-3) =\left(2x^{2}+1\right) (x-12)$; 24. $\left(x^{2}-4\right)+ (x-2) (3-2x) =0$;

25. $(3x-2) (x+1) =x^{2}-1$ 26. $2 (4-x) +3x (x-4) =0$;

27. $(2x+3) ^{2}= (x-7) ^{2}$ 28. $4x^{2}-1= (2x+1) (3x-5)$;

29. $4x^{2}-9= (x+7) (2x+3)$; 30. $9x^{2}-4- (3x+2) (x-1) =0$

31. $(x+2) (3-4x) =x^{2}+4x+4$; 32. $(x+3) (2x+3) =4x^{2}-9$;

33. $16x^{2}-25= (4x-5) (2x+1)$; 34. $(x-2) (7x+3) =49x^{2}-9$;

35. $\left(9x^{2}-4\right) (x+1) = (3x+2) \left(x^{2}-1\right)$; 36. $\left(x^{2}-4\right) (4x-1) = (x-2) \left(16x^{2}-1\right)$;

37. $(x-1) ^{2}+x^{2}-1= (x-1) (x+3)$; 38. $(2x-3) ^{2}+4x^{2}-9= (2x-3) (3x+5)$;

39. $(x-3) ^{2}-9+x^{2}= (x-3) (x+1)$; 40. $(2x+5) ^{2}-25+4x^{2}= (2x+5) (5-9x)$.

**Bài 3.** Trong một khu đất có dạng hình vuông, người ta dành một mành đất có dạng hình chữ nhật ở góc khu đất đề làm bể bơi (Hình bên). Biết diện tích của bể bơi bằng $600 m^{2}$, hãy tính độ dài cạnh của khu đất.

**Bài 4.** Cô Liên có một mảnh đất hình chữ nhật với chiều dài $20 m$ và chiều rộng $15 m$. Cô dự định xây nhà trên mảnh đất đó và dành một phần diện tích đất để làm sân vườn như Hình bên. Biết diện tích đất làm nhà là $140 m^{2}$. Hỏi $x$ bằng bao nhiêu mét?

**II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BÂC NHẤT**

* **Kiến thức cần nhớ**

Điều kiện xác định của một phương trình chứa ần ờ mẫu: Cho tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0.

**Ví dụ 3.** Tìm điều kiện xác định của phương trình: $\frac{2}{x-1}=1+\frac{1}{x+2}$

Ta có: $x-1\ne 0$ khi $x\ne 1$ và $x+2\ne 0$ khi $x\ne -2$.

Vậy điều kiện xác định của phương trình là $x\ne 1$ và $x\ne -2$.

**Bài 5.** Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

1. $\frac{1}{2x}=\frac{3}{2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2}=1$ 3. $\frac{3}{7}=\frac{x+10}{x-3}$ 4. $\frac{3}{x-2}=\frac{2x-1}{x-2}-x$;

5. $\frac{x}{x-1}=\frac{x+4}{x+1}$; 6. $\frac{2}{x-8}=\frac{7}{x+6}$; 7. $\frac{x+2}{x}=\frac{3}{2 (x-1) }$ 8. $\frac{14}{x+1}=\frac{3}{x-6}$

9. $\frac{7}{3x-9}-\frac{3}{x-3}=0$; 10. $\frac{4}{2x-3}-\frac{7}{3x-5}=1$ 11. $\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+5}=\frac{1}{3x+3}$ 12. $\frac{6}{x+3}-\frac{1}{x-4}=\frac{5}{2x+6}$.

**Kiến thức cần nhớ**

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

* **Bước 1:** Phân tích các mẫu ra nhân tử.
* **Bước 2**: Đặt điều kiện cho từng nhân tử ở mẫu khác 0.
* **Bước 3:** Quy đồng mẫu chung cho cả hai vế.
* **Bước 4:** Khử mẫu chung cả hai vế, đồng thời rút gọn và giải.
* **Bước 5:** So với điều kiện rồi kết luận.

**Ví dụ 4.** Giải phương trình: $\frac{x+2}{x}=\frac{2x+3}{2 (x-2) }$

Điều kiện xác định: $x\ne 0$ và $x\ne 2$

Với điều kiện trên phương trình trở thành:

$$\frac{2 (x-2) (x+2) }{2x (x-2) }=\frac{x (2x+3) }{2x (x-2) }$$

$$2 (x-2) (x+2) =x (2x+3)$$

$$2\left(x^{2}-4\right)=x (2x+3) $$

$$2x^{2}-8=2x^{2}+3x$$

$$3x=-8$$

$$x=-\frac{8}{3}  (thỏa mãn điều kiện xác định).$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\frac{8}{3}$.

**Bài 6.** Giải các phương trình sau:

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{2}$; 2. $\frac{1}{3x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}$; 3. $\frac{2}{3x}-\frac{1}{2x}=\frac{3}{4}$; 4. $\frac{1}{x}-\frac{3}{2x}=\frac{1}{5}$;

5. $\frac{3}{8x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{x^{2}}$; 6. $\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x}=\frac{1}{x^{2}}$; 7. $\frac{1}{2x}+\frac{3}{4x}=\frac{5}{2x^{2}}$; 8. $\frac{2}{3x}-\frac{1}{2x}=\frac{3}{4x^{2}}$;

9. $\frac{x^{2}-6}{x}=x+\frac{3}{2}$; 10. $\frac{5}{x+2}=3$; 11. $\frac{2}{x-1}=1$; 12. $\frac{7}{3x-2}=4$;

13. $\frac{x}{x+5}=2$; 14. $\frac{2x-5}{x+5}=3$; 15. $\frac{3x}{5x-1}=2$; 16. $\frac{2x}{3x+2}=-3$;

17. $\frac{3x}{4x-3}=-2$; 18. $\frac{5}{3x+2}=2x-1$; 19. $\frac{2x- (3x+6) }{x-3}=0$; 20. $\frac{3}{2}=6-\frac{x+10}{x-3}$;

21. $\frac{2x-1}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$ 22. $\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}+7$; 23. $\frac{5}{x-3}=\frac{x+2}{x-3}+3$; 24. $\frac{1-x}{x+1}+3=\frac{2x+3}{x+1}$;

25. $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$; 26. $\frac{ (x+2) ^{2}}{2x-3}-1=\frac{x^{2}+10}{2x-3}$; 27. $2x-\frac{2x^{2}}{x+3}=\frac{4x}{x+3}+\frac{2}{7}$; 28. $\frac{5x}{2x+2}+1=-\frac{6}{x+1}$;

29. $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{3x+3}=\frac{1}{6}$; 30. $x+\frac{1}{x}=x^{2}+\frac{1}{x^{2}}$.

**Bài 7.** Giải các phương trình sau:

1. $\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x+2}$; 2. $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{x-2}$; 3. $\frac{2}{x-9}=\frac{9}{x+12}$ 4. $\frac{3}{x+4}=\frac{2}{2x+1}$;

5. $\frac{3x-2}{x+7}=\frac{6x+1}{2x-3}$ 6. $\frac{2x+1}{x-1}=\frac{5 (x-1) }{x+1}$; 7. $\frac{5}{3x-2}-\frac{1}{x-4}=0$; 8. $\frac{7}{3x-4}-\frac{1}{x-1}=0$;

9. $\frac{4}{2x-3}-\frac{7}{3x-5}=0$; 10. $\frac{x+3}{x-1}+\frac{x-2}{x}=2$; 11. $\frac{x+2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x (x-1) }$ 12. $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-4}=-1$;

13. $\frac{2x+1}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x (x+1) }$; 14. $\frac{2x}{x+1}+\frac{x-1}{x}=\frac{2}{x (x+1) }$; 15. $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-2}=\frac{10}{x (x-2) }$ 16. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{2}{x (x-2) }=\frac{1}{x}$

17. $\frac{x+1}{x}-\frac{3x}{x (x+4) }=\frac{x-2}{x+4}$ 17. $\frac{2x}{x-7}-\frac{x-14}{x (x-7) }=\frac{x-2}{x}$ 18. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{4}{ (x+1) (x-1) }$

19. $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{3x-20}{ (x-2) (x-3) }$ 20. $\frac{x-1}{x-2}+\frac{8}{ (x-2) (x-4) }=\frac{x+3}{x-4}$ 21. $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}=\frac{3x-11}{ (x+1) (x-2) }$;

22. $\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+2}=\frac{x+1}{ (x-1) (x+2) }$; 23. $\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x-3}=\frac{3x-18}{ (x-4) (x-3) }$; 24. $\frac{x}{x-5}+\frac{3}{x-8}=\frac{-5x+1}{ (x-5) (x-8) }$

25. $\frac{x}{x+6}+\frac{3}{x-8}=\frac{-12x+33}{ (x+6) (x-8) }$; 26. $\frac{x}{x+11}+\frac{3}{x-12}=\frac{-12x+33}{ (x+11) (x-12) }$ 27. $\frac{1}{2x-1}+\frac{3}{4 (3x-2) }=\frac{2}{3x-2}$;

**Bài 8.** Giải các phương trình sau:

1. $\frac{x-1}{x}+\frac{1-2x}{x (x+1) }=\frac{1}{x+1}$; 2. $\frac{x+3}{x-3}=\frac{3}{x^{2}-3x}+\frac{1}{x}$; 3. $\frac{x+4}{x-4}-\frac{1}{x}=\frac{4}{x^{2}-4x}$ 4. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{9}{x^{2}-2x}$;

5. $\frac{x-5}{x}+\frac{x-3}{x+5}=\frac{x-25}{x^{2}+5x}$; 6. $\frac{x+7}{x-7}-\frac{7}{x^{2}-7x}=\frac{1}{x}$; 7. $\frac{4x}{4x-3}+\frac{5}{3x-4x^{2}}=\frac{x+2}{x}$;

8. $\frac{4x}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{8x-7}{3x-6}$; 9. $\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{3x+3}$; 10. $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}+\frac{2x}{ (1-x) (x+1) }=0$;

**Bài 9.** Giải các phương trình sau:

1. $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x^{2}-4}$ 2. $\frac{4}{x-3}+\frac{3}{x+3}=\frac{x-2}{x^{2}-9}$ 3. $\frac{x}{x-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{x^{2}-5}{x^{2}-1}$; 4. $\frac{x+1}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{4x^{2}-2}{x^{2}-4}$

5. $\frac{x}{x^{2}-4}-\frac{7}{x+2}=\frac{3}{x-2}$; 6. $\frac{x-1}{x-5}-\frac{4x}{x+5}=\frac{9x-5}{x^{2}-25}$; 7. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{2x^{2}+2}{x^{2}-1}$; 8. $\frac{x}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{x^{2}+9}{x^{2}-9}$;

9. $\frac{x+1}{x-2}-\frac{6x^{2}}{x^{2}-4}=\frac{x-1}{x+2}$ 10. $\frac{3-2x}{x^{2}-25}+\frac{2}{x-5}=\frac{5}{x+5}$ 11. $\frac{x+7}{x+4}-\frac{7}{x-4}=\frac{-56}{x^{2}-16}$ 12. $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x^{2}}{x^{2}-9}=\frac{-6}{x+3}$;

13. $\frac{2x-5}{x+4}+\frac{x}{4-x}=\frac{-17x+56}{x^{2}-16}$; 14. $\frac{3x}{2x+1}-\frac{4x^{2}+1}{4x^{2}-1}=\frac{x}{2x-1}$; 15. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{2+x}=\frac{x^{2}+16}{x^{2}-4}$; 16. $\frac{x+2}{x-3}+\frac{x-2}{x+3}=\frac{2x^{2}+12x}{x^{2}-9}$;

17. $\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^{2}-x+1}=\frac{3x}{x^{3}+1}$; 18. $\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-3}{x+4}=\frac{2\left(x^{2}+12\right)}{x^{2}-16}$

19. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{1-x}{x+2}=\frac{3x^{2}+3x+6}{x^{2}-4}$; 20. $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{2x-1}{x+1}=\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}-1}$.

**Bài 10.** Một người đi xe đạp từ $A$ đến $B$ cách nhau $60 km$. Sau 1 giờ 45 phút, một xe máy cũng đi từ $A$ đến $B$ và đến $B$ sớm hơn $xe$ đạp 2 giờ. Tính tốc độ của mỗi $xe$, biết rằng tốc độ của xe máy gấp 4 lần tốc độ của xe đạp.

**Bài 11.** Hai ô tô khởi hành cùng một lúc để đi từ địa điểm $A$ đến địa điểm $B$ cách nhau $120 km$. Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là $10 km/h$ nên ô tô thứ hai đến $B$ trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

**Bài 12.** Một người đi xe máy từ huyện Ngân Sơn đến huyện Chợ Mới cách nhau $100 km$. Khi về người đó tăng vận tốc thêm $10 km/h$ so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi của xe máy.

**Bài 13.** Hai bạn Long và Trí cùng hẹn nhau đạp xe đến một địa điểm cách vị trí bạn Long $9 km$ và cách vị trí bạn Trí $12 km$. Hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc. Tính tốc độ của mỗi bạn, biết tốc độ của bạn Trí hơn tốc độ của bạn Long là $4 km/h$.

**Bài 14.** Hai thành phố $A$ và $B$ cách nhau $160 km$. Một ô tô di chuyển từ $A$ đến $B$, rồi quay trờ về $A$ với tổng thời gian đi và về là 7 giờ 12 phút. Tính tốc độ lượt đi của ô tô, biết tốc độ lượt đi lớn hơn tốc độ lượt về $20\%$.

**Bài 15.** Một nhóm bạn trė cùng tham gia khởi nghiệp và dự định góp vốn là 180 triệu đồng, số tiền góp mỗi người là như nhau. Nếu có thêm 3 người tham gia cùng thì số tiền mỗi người góp giảm đi 3 triệu đồng. Hỏi ban đầu nhóm bạn trẻ đó có bao nhiêu người?

**Bài 16.** Một xí nghiệp dự định chia đều 39000000 đồng để thường cho các công nhân tham gia hội thảo nhân ngày thành lập xí nghiệp. Khi đến ngày hội thảo chỉ có $80\%$ số công nhân tham gia, vì thế mỗi người tham gia hội thảo được nhận thêm 100000 đồng. Tính sổ công nhân dự định tham gia lúc đầu.

**Bài 17.** Bạn Giang dự định dùng hết số tiền 900 nghìn đồng để mua một số chiếc áo đồng giá tặng các bạn có hoàn cảnh khó khăn. Khi đến cửa hàng, loại áo mà bạn Giang dự định mua được giảm giá 50 nghìn đồng/chiếc. Do vậy, bạn Giang đã mua được số lượng áo gấp 1, 5 lần so với số lượng dự định. Tính giá tiền của mỗi chiếc áo bạn Giang đã mua.

**Bài 18.** Lớp 9A có 80 quyển yở dự định khen thưởng học sinh giỏi cuối năm. Thực tế cuối năm tăng thêm 2 học sinh giỏi, nên mỗi phần thưởng giảm đi 2 quyển vở so với dự định. Hỏi cuối năm lớp 9A có bao nhiêu học sinh giỏi, biết mỗi phần thưởng có số quyền vờ bằng nhau.

**Bài 19.** Một đội công nhân làm đường nhận nhiệm vụ trải nhựa $9800 m^{2}$ mặt đường. Ở giai đoạn đầu, đội trải được $4200 m^{2}$ mặt đường. Ở giai đoạn hai, đội công nhân tăng năng suất thêm $200 m^{3}/$ ngày rồi hoàn thành công việc. Hỏi đội công nhân đã hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày? Biết năng suất lao động của đội là không thay đổi ở mỗi giai đoạn và thời gian làm việc của hai giai đoạn là như nhau.

**Bài 20.** Biết nồng độ muối của nước biển là $3, 5\%$ và khối lượng riêng của nước biển lả̉ $1020 g/l$. Từ 4 lít nước biển như thế, người ta hoà thêm muối để được một dung dịch có nồng độ muối là $20\%$. Tính lượng muối cần hoà thêm.

**Bài 21.** Hai người cùng làm chung một công việc thì xong trong 4 giờ. Hai người cùng làm được 2 giờ thì người thứ nhất bị điều đi làm công việc khác. Người thứ hai tiếp tục làm việc trong 6 giờ nữa thì xong công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải lám trong bao lâu mới xong công việc đó?

**Bài 22.** Hai người cùng làm việc thì trong 6 giờ 40 phút xong việc. Nếu đế một mình người thứ nhất làm trong 5 giờ rồi người đó nghỉ thì người thứ hai phải làm nốt phầr việc còn lại trong 8 giờ. Hòi nếu làm riêng thì mỗi người phải mất bao lâu để hoàn thànt công việc?