**§2. TỨ GIÁC NộI TIẾP**

**I. Định nghĩa**

**Kiến thức cần nhớ**

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

Đường tròn đi qua bốn đỉnh của tứ giác gọi là đuờng tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Vi du 1: Trong các hình sau. Hình nào có tứ giác nội tiếp.

A black circle with a square in it

Description automatically generated

Hinh 1

A black circle with a triangle and a triangle in the center

Description automatically generated

Hinh 2

A black and white drawing of a circle

Description automatically generated

Hinh 3

A black circle with a point in the center

Description automatically generated

Hinh 4

**Huớng dẫn giải:**

Trong các hình trên có hình 1 là có tứ giác nội tiếp vì có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn.

**II. Tính chất**

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng .

Ví du 2: Tính và của tứ giác có trong hình bên.

**Hương dẫn giải:**

Tứ giác là tứ giác nội tiếp. Do đó

A circle with a triangle in center

Description automatically generated

**II. Cách chứng minh**

* Chứng minh tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm.
* Chứng minh tứ giác có 2 góc đối bù nhau.
* Chứng minh tứ giác có góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện.
* Chứng minh tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

**B BÀI TẬP CƠ BÅN**

Bài 1: Cho tam giác nhọn có hai đường cao và cắt nhau ở . Chứng minh: tứ giác và nội tiếp.

Bài 2: Từ điềm nằm ngoài đường tròn , vẽ tiếp tuyến ( là tiếp điểm) và cát tuyến không đi qua tâm nằm giữa và không cắt đoạn thẳng . Gọi là trung điểm của . Chứng minh: là tứ giác nội tiếp.

Bài 3: Cho tam giác vuông tại nội tiếp trong đường tròn tâm , đường kính . Gọi là chân đường cao hạ từ xuống là trung điểm đoạn thẳng . Tiếp tuyến tại của đường tròn tâm cắt kéo dài tại điểm . Chứng minh:

1. Tứ giác nội tiếp trong một đường tròn.
2. .

Bài 4: Cho tam giác nội tiếp đường tròn thoả mãn . Lấy điềm là điềm thuộc cung không chứa . Tính số đo góc .

Bài 5: Cho tứ giác nội tiếp đường tròn .

Biết (Hình bên).

Tính số đo của và .

Bài 6: Cho tứ giác nội tiếp đường tròn như Hình bên. Hai đường thẳng và cắt nhau tại . Biết rằng . Tính số đo của các góc và .

A diagram of a circle and a triangle

Description automatically generated

Bài 7: Từ điểm nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính của cắt tại . Gọi là giao điểm của và .

1. Chứng minh: tại và tứ giác nội tiếp.
2. Tính số đo và chứng minh: tứ giác nội tiếp.

Bài 8: Trên cạnh của , lấy , trên cạnh lấy và sao cho biết . Chứng minh:

1. đồng dạng với .
2. Tứ giác BCDE nội tiếp.

Bài 9: Cho tam giác có ba góc đều nhọn nội tiếp đường tròn tâm , đường cao và cắt đường tròn theo thứ tự tại và .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp đường tròn và .
2. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: .

Bài 10: Hai đường và ' cắt nhau ờ . Trên lần lượt lấy các điểm , và sao cho . Chứng minh:

1. đồng dạng với .
2. Tứ giác nội tiếp.

Bài 11: Cho tam giác có ba góc nhọn, . Vẽ các đường cao và của tam giác . Gọi là giao điểm của và . Chứng minh:

1. Tứ giác là tứ giác nội tiếp.
2. và tính tỉ số .

Bài 12: Hai tiếp tuyến tại và của cắt nhau ở . Vẽ cát tuyến sao cho thuộc cung nhỏ . Gọi là trung điểm . Chứng minh:

1. Tứ giác CDIO nội tiếp.
2. Ngũ giác CDIOE nội tiếp.

Bài 13: Cho một điềm nằm bên ngoài đường tròn . Kẻ hai tiếp tuyến của đường tròn là hai tiếp điểm . Vẽ cát tuyến của đường tròn với thuộc đường tròn , nằm giữa và và tia nằm giữa hai tia và .

1. Chứng minh: tứ giác OPMN nội tiếp đường tròn.
2. Gọi là trung điềm của đoạn thẳng . So sánh và .

Bài 14: Cho tam giác vuông ở . Trên lấy điểm và vẽ đường tròn đường kính . Kẻ cắt đường tròn tại . Đường thẳng cắt đường tròn tại . Chứng minh:

1. Tứ giác nội tiếp.
2. là phân giác của .

Bài 15: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến và là 2 tiếp điểm). cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác AMON nội tiếp.
2. Vẽ đường kính của . Chứng minh: và .
3. Đoạn cắt tại . Đường thẳng qua song song cắt tại khác cắt tại . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và là trung điểm của .

Bài 16: Cho đường tròn tâm , đường kính . Hai dây cung và cắt nhau tại nằm bên trong ). Vẽ vuông góc với tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh: là phân giác của .
3. Chứng minh: là tia phân giác của .
4. Gọi là trung điểm của . Chứng minh: tứ giác nội tiếp.

Bài 17: Cho đường tròn tâm đường kính . Gọi là trung điểm của , qua kẻ dây vuông góc với tại . Gọi là điểm tùy ý trên cung nhỏ là giao điểm của và . Chứng minh:

Bài 18: Cho tam giác vuông tại . Kẻ đường cao của . Vẽ đường tròn đường kính , đường tròn này cắt tại , cắt tại . Chứng minh:

1. tại và .
2. Tứ giác BEFC nội tiếp.

Bài 19: Cho tam giác có là đường cao. Đường tròn tâm , đường kính cắt và lần lượt tại và . Tia cắt đường tròn tại điểm thứ hai là . Chứng minh:

1. Tư giác nội tiếp.
2. Tia là tia phân giác của .

Bài 20: Cho tam giác nhọn nội tiếp . Các đường cao cắt nhau tại . Gọi là trung điểm của . Chứng minh:

1. Tứ giác và tứ giác nội tiếp.
2. là tia phân giác của và tứ giác nội tiếp.

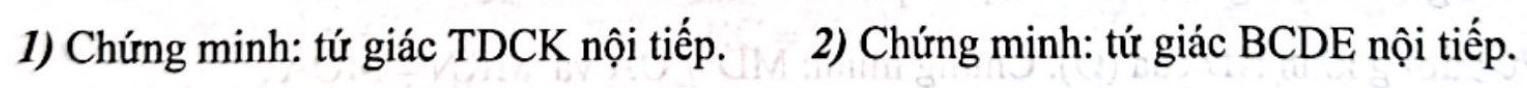
Bài 21: Cho nửa đường tròn đường kính . Kẻ là tiếp tuyến tại của và lấy hai điểm và thuộc nửa đường tròn. Các tia và cắt lần lượt ở (F ở giữa và ). Chứng minh:

1. AC. AE không đồi.
2. và tứ giác nội tiếp.

Bài 22: Cho tam giác vuông tại , đường cao . Trên đoạn lấy điểm sao cho . Vẽ vuông góc với tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp, xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác .
2. Chứng minh: là tia phân giác của .

Bài 23: Cho tam giác nội tiếp đường tròn tâm . Trên đoạn lấy điểm . Qua vẽ đường thẳng vuông góc với và cắt cạnh và lần lượt tại và . Vẽ là đường kính của .



Bài 24: Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn tâm có hai đường cao và .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp.
2. Vẽ là đường kính của . Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: tứ giác CDMK nội tiếp và tại .

Bài 25: Cho đường tròn cố định có dây cung cố định. Điểm di động trên cung lớn . Vẽ MH vuông góc với ở . Vẽ vuông góc với ở và vuông góc với MB ở C.

1. Chứng minh:tứ giác MDHC nội tiếp, rồi suy ra .
2. Chứng minh: tứ giác nội tiếp.
3. Vẽ là đường kính của . MK cắt tại . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và .

Bài 26: Cho tam giác có ba góc nhọn và đường cao . Vẽ đường tròn đường kính . Từ kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (với là các tiếp điểm, và nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng . Gọi là giao điểm của hai đường thẳng . Chứng minh:

1. Tứ giác AMKO là tứ giác nội tiếp.
2. KA là tia phân giác .
3. .

Bài 27: Cho tam giác nhọn có ba đường cao và đồng quy ở trực tâm .

1. Chứng minh: hai tứ giác và nội tiếp. bằng những góc nào? Nhận xét gì về tia ?
2. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và là tia phân giác . Điểm là gì của ?

Bài 28: Hai tiếp tuyến tại và của đường tròn cắt nhau ở . Lấy thuộc dây sao cho . Đường thẳng vuông góc với tại cắt ở , cắt kéo dài ở . Chứng minh:

1. Hai tứ giác và nội tiếp.
2. và là trung điểm của .

Bài 29: Cho đường tròn tâm có hai đường kính và vuông góc với nhau. Lấy điểm bất kì trên cung nhỏ ( khác và ), kẻ cắt tại .

1. Tính và chứng minh: tứ giác MNOB nội tiếp.
2. Đoạn thẳng cắt ở . Tính và chứng minh: tứ giác nội tiếp.
3. Chứng minh: song song với .

Bài 30: Cho tam giác nội tiếp trong đường tròn. Điềm thuộc cung không chứa . Vẽ vuông góc với ở và vuông góc với ở .

1. Tứ giác có tính chất gì? và bằng những góc nào?
2. Chứng minh: đồng dạng với .
3. Giả sử cắt tại . Chứng minh: .

Bài 31: Cho tam giác nhọ̣n nội tiếp trong đường tròn tâm (nên vẽ gần tâm). Láyy điểm thuộc cung nhỏ . Vẽ vuông góc với ở vuông góc với ở và giả sử nẳm ngoài cạnh .

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: .
3. Kéo dài cắt ở . Chứng minh: .

Bài 32: Cho tam giác nhọn, ; nội tiếp trong đường tròn tâm (nên vẽ gần tâm). Lấy điềm thuộc cung nhỏ . Vẽ vuông góc với ở vuông góc với ở và giả sử nằm ngoài . Vẽ MI vuông góc với ở . Chứng minh

1. .
2. bù với và ba điểm thẳng hàng.

Ghi chú: Đường thẳng qua được gọi là đường thẳng Simpson.

**ㅋ BÀI TậP LUYệN TậP**

Bài 33: Cho tam giác nhọn . Vẽ đường tròn tâm có đường kính cắt hai cạnh và theo thứ tự tại và . Gọi là giao điểm của của và cắt tại . Gọi là trung điểm . Chứng minh:

1. Tứ giác nội tiếp đường tròn tâm và .
2. và tứ giác nội tiếp.
3. Năm điểm , E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 34: Cho tam giác nhọn nội tiếp . Gọi là giao điểm của ba đường cao cùa .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp.
2. Tia cắt tại . Từ vẽ đường thẳng song song với và cắt tia tại . Chứng minh: và điểm thuộc .
3. Tia IH cắt tại . Tính .

Bài 35: Từ một điềm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến đến đường tròn là các tiếp điểm). Kè đường kính của cắt tại cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và tại .
2. Chứng minh: tại và tứ giác NHEB nội tiếp.
3. Chứng minh: . và tứ giác nội tiếp.

Bài 36: Từ điểm ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn , là tiếp điểm). Gọi là giao điểm của với .

1. Chứng minh: tứ giác là tứ giác nội tiếp và tại .
2. Kè đường kính của đường tròn . cắt đường tròn tại khác ). Chứng minh: .
3. Chứng minh: và tứ giác là tứ giác nội tiếp.
4. Tia cắt đường tròn tại khác . Chứng minh: và thẳng hàng.

Bài 37: Từ một điểm nằm ngoài vẽ hai tiếp tuyến là hai tiếp điềm) và đường kính cắt đường tròn tại cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và vuông góc tại .
2. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: và
3. Chứng minh: tứ giác và tứ giác là tứ giác nội tiếp.
4. Chứng minh: và là trung điểm của đoạn .

Bài 38: Cho tam gí́c có ba góc nhọn , các đường cao và cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp.
2. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và là phân giác của .
3. Chứng minh: , rồi suy ra tứ giác nội tiếp.

Bài 39: Cho tam giác nhọn . Vẽ đường tròn đường kính cắt hai cạnh và lần lượt tại và cắt tại cắt tại .

1. Chưng minh: tứ giác nội tiếp và tại .
2. Tia cắt đường thẳng tại . Chứng minh: .
3. Chứng minh: là phân giác cùa và tứ giác nội tiếp.
4. Tia cắt tại ( nằm giữa và ). Chứng minh: và là tiếp tuyến của .

Bài 40: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm , các đường cao , cắt nhau tại và cắt đường tròn lần lượt tại và (I khác khác )

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh: tam giác cân.
3. Kẻ đường kính của đường tròn . Gọi là trung điểm . Chứng minh: 3 điểm , thẳng hàng.

Bài 41: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp . Các đường cao , cắt nhau tại .

1. Chứng minh: các tứ giác và nội tiếp.
2. Chứng minh: là tia phân giác của góc và .
3. Từ kẻ một đường thẳng song song với cắt các đường thẳng và lần lượt tại và . Chứng minh: cân và là trung điểm của đoạn .

Bài 42: Cho đường tròn tâm , đường kính . Gọi là trung điểm của đoạn thẳng , qua kė dây cung vuông góc với . Gọi là điểm tùy ý trên cung nhỏ ( không trùng với và ), là giao điềm của và .

1. Chứng minh: tứ giác là tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh: .
3. Trên đoạn thẳng lấy điềm sao cho . Chứng minh: đều và .

Bài 43: Từ điểm nằm ngoài đường tròn , vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn là các tiếp điểm). Qua vẽ cát tuyến của sao cho đường thẳng MD cắt đoạn thẳng . Gọi là trung điểm của .

1. Chứng minh: 5 điểm cùng thuộc một đường tròn.
2. Tư vẽ đường thẳng vuông góc với cắt tại và cắt tại . Chứng minh: , tư đó suy ra tứ giác nội tiếp.
3. Chứng minh: là trung diểm của .

Bài 44: Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn có ba đường cao , cắt nhau tại thuộc thuộc thuộc ).

1. Chứng minh: các tứ giác và là các tứ giác nội tiếp.
2. Gọi là đường kính của . Tia cắt đường tròn tại . Chứng minh: tứ giác là hình thang cân và .
3. Giả sử . Gọi là giao điểm của tia và đường tròn và gọi là giao điểm của tia và đường tròn . Chứng minh: và tính bán kính đường tròn đi qua 4 điểm theo .

Bài 45: Cho tam giác vuông tại là trung điểm của . Đường tròn đường kính cắt tại . Đường thẳng cắt đường tròn đường kính tại .

1. Chứng minh: tứ giác BADC nội tiếp.
2. Chứng minh: là phân giác của góc .
3. và kéo dài cắt nhau tại . Chứng minh: ba điểm thẳng hàng.

Bài 46: Cho tam giác nhọn nội tiếp trong đường tròn . Các đường cao cắt nhau tại .

1. Chứng minh: các tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Vẽ đường kính của đường tròn . Chứng minh: đồng dạng với suy ra .
3. Gọi là giao điềm của và . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và .
4. Cho . Tính theo .

Bài 47: Cho đường tròn tâm , bán kính và điểm ở ngoài đường tròn sao cho . Kè hai tiếp tuyến là các tiếp điểm . Gọi là giao điểm của và .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và .
2. Kè dây cung của đường tròn song song với . Đoạn cắt tại (khác ). Gọi là trung điểm của . Chứng minh: thẳng hàng và tứ giác nội tiếp.
3. Chứng minh: và tam giác vuông.
4. Kẻ đường kính của đường tròn . Chứng minh: và tia là phân giác của góc .

Bài 48: Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn , các đường cao và cắt nhau tại . Hai đường và cắt nhau tại .

1. Chứng minh: các tứ giác là các tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh: và .
3. Đường thẳng cắt đường tròn tại (E khác ). Tia cắt tại . Gọi I là giao điểm của và . Chứng minh: thẳng hàng và .

Bài 49: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn có hai đường cao cắt nhau tại , tia cắt cạnh tại . Gọi là giao điểm của hai đường thẳng và .

1. Chứng minh: tại .
2. Chứng minh: tứ giác nội tiếp đường tròn và .
3. Kè đường kính của . Tia cắt tại điểm thứ hai là . Chứng minh: tứ giác MTEB nội tiếp và ba điểm thẳng hàng.

Bài 50: Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn , ba đường cao , cắt nhau tại .

1. Chứng minh: các tứ giác BKNC, ANHK nội tiếp.
2. Kė đường kính của . Chứng minh: .
3. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: và .
4. Chứng minh: tứ giác MHDL nội tiếp.

Bài 51: Cho tam giác có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn và các đường cao cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp.
2. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và .
3. Gọi là giao điềm khác của hai đường tròn và (I). Chứng minh: .

Bài 52 : Cho đường tròn tâm , đường kính . Trên đường tròn lấy điểm bất ki ( không trùng với và ). Tiếp tuyến của đường tròn tại cắt tia ở điểm . Gọi là hình chiếu của trên đường thẳng . Tia cắt đường tròn tại điểm (không trùng với ).

1. Chứng minh: và .
2. Chứng minh: tứ giác nội tiếp.
3. Chứng minh: , rồi suy ra .

Bài 53: Cho tam giác nhọn nội tiếp trong có hai đường cao lần lượt là và cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác và tứ giác là các tứ giác nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác và tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEDC.
2. Chứng minh: IK // OA.

Bài 54: Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn . Các đường cao cắt nhau tại , tia cắt đường tròn tại . Chứng minh:

**1) Tứ giác nội tiếp và .  
 2) và .**

Bài 55: Cho đường tròn tâm bán kính , có dây cố định . A là một điểm trên cung lớn sao cho có ba góc nhọn. Các đường cao và của tam giác cắt nhau tại (với ).

1. Chứng minh: tứ giác AMHN nội tiếp trong một đường tròn.
2. Tia cắt đường tròn tại và tia cắt tại . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và .
3. Cho biết . Tính độ dài của đoạn .

Bài 56: Cho đường tròn đường kính . Vẽ tiếp tuyến với đường tròn . Trên lấy điềm sao cho cắt tạo khác . Qua trung điềm của đoạn , dựng đường thẳng vuông góc với cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp được trong đường tròn.
2. Chứng minh: là tiếp tuyến cùa đường tròn .
3. Gọi là điểm trên cung lớn của đường tròn khác và khác ). Chứng minh: .

Bài 57: Cho tam giác nhọn ( . Đường tròn đường kính cắt các cạnh lần lượt tại và . và cắt nhau tại .

1. Chứng minh: và tứ giác nội tiếp.
2. cắt tại . Chứng minh: và .
3. Chứng minh: tứ giác DKOE nội tiếp.
4. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: .

Bài 58: Cho đường tròn , đường kính . Lấy điểm khác và trên đường tròn . Trên cung nhỏ lấy điểm khác và . Vẽ vuông góc với tại . Đoạn thẳng và cắt nhau tại .

1. Chứng minh: là tứ giác nội tiếp.
2. Chưng minh: .
3. Vẽ dây của đường tròn vuông góc với . Tia cắt đường tròn tại . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và thẳng hàng.

Bài 59: Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn có hai đường cao và cắt nhau tại trực tâm .

1. Chứng minh: bốn điểm cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp.
2. Vẽ là đường kính của . Chứng minh: vuông góc với và thẳng hàng.
3. Gọi là trung điểm của đoạn thẳng . Cho là giao điểm của hai đường thẳng và ; đường thẳng lần lượt cắt hai đường thẳng và tại và . Chứng và song song với .

Bài 60: Cho bốn điểm nằm trên đường tròn tâm theo đúng thứ tự sao cho . Hai đường thă̆ng và cắt nhau ở . Tiếp tuyến tại cắt đường thẳng tại F. Chứng minh:

1. .
2. Tứ giác nội tiếp và .

Bài 61: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn . Hai đường cao và của tam giác cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp.
2. Tia cắt tại , tia cắt tại . Chứng minh: và .
3. Chứng minh: vuông góc với .
4. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp theo khi .

Bài 62: Từ điềm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến đến đường tròn , là các tiếp điểm). Trên dây lấy sao cho . Từ vẽ đường thẳng vuông góc với cắt tiếp tuyến lần lượt tại và .

1. Chứng minh: tứ giác OMFC; OMBE nội tiếp.
2. Chứng minh: tam giác cân.
3. cắt tại . Chứng minh: .IF.
4. Cho . Chứng minh: diện tích tứ giác không đổi khi di chuyển trên dây . Tính diện tích tứ giác theo .

Bài 63: Cho tam giác nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm có . Trên cung

nhỏ lấy điềm khác thỏa mãn . Vẽ đường kính của đường tròn và gọi lần lượt là hình chiếu vuông góc của trên .

1. Chứng minh: bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh: vuông và .
3. Khi điềm di động trên cung nhỏ thì đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định. (gợi ý: Gọi E là giao điểm cuia và cân tại )

Bài 64: Cho đường kính và là một điểm trên đường tròn , ( khác và khác ) sao cho . Lấy một điểm trên đoạn thẳng . Qua kẻ đường thằng (d) vuông góc với cắt đường thẳng và lần lượt tại và .

1. Tính .
2. Chứng minh: tứ giác AMIQ và AINB là tứ giác nội tiếp.
3. Gọi là điểm đối xứng của qua điểm . Chứng minh: [MA.MP](http://MA.MP) = [MI.MN](http://MI.MN) và .
4. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: thẳng hàng.
5. cắt tại . Chứng minh: là phân giác và .

Bài 65: Cho và là hai dây cung của một đường tròn cắt nhau tại (I nằm trong đường tròn). Gọi là điềm chính giữa của cung nhỏ . cắt tại . Lấy điểm thuộc đường thẳng sao cho . Chứng minh:

1. Tứ giác BDKH nội tiếp.
2. cân ở .

Bài 66: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn . Vẽ hai đường cao và cắt nhau tại . Gọi là giao điềm của và .

1. Chứng minh: vuông góc với và tứ giác nội tiếp được đường tròn.
2. Chứng minh: .
3. Gọi là điểm đối xứng của và và là trung điểm cua . Chứng minh: tứ giác là hình bình hành, từ đó suy ra ba điểm thẳng hàng.
4. Gọi và lần lượt là giao điểm của với và . Chứng minh: .

Bài 67: Từ một điểm ở ngoài đường tròn với , vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của cắt ( tại , tia cắt tại .

1. Chứng minh: tại và .
2. Chứng minh: song song với .
3. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và là tia phân giác của góc .
4. cắt tại . Chứng minh: ba đường thẳng và đồng quy tại một điềm.

Bài 68: Cho tam giác nhọn nội tiếp bán kính , các đường cao , cắt nhau tại .

1. Chứng minh: là các tứ giác nội tiếp.
2. Vẽ đường kính của . cắt tại . Chứng minh: là trung điểm .
3. Chứng minh: tứ giác FDIE nội tiếp.
4. Đường thẳng qua song song với cắt tại . Kẻ lần lượt vuông góc với tại và . Chứng minh: thẳng hàng.

Bài 69: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp . Các đường cao , của tam giác cắt nhau tại . là đường kính của .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và tứ giác là hình bình hành.
2. Gọi là giao điểm của hai đường thẳng và . Tia cắt tại . Chứng minh: 5 điểm cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh: thẳng hàng.

Bài 70: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn . Hai đường cao và cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tại và tứ giác nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn (BDEC).
2. là điểm đối xứng của qua . Chứng minh: thuộc và thuộc đường tròn ngoại tiếp .
3. Chứng minh: . (gơi ý: ké đuờng kinh cuia (O))
4. Giả sử và . Tính diện tích tứ giác theo .

Bài 71: Cho tam giác có . Vẽ đường tròn đường kính cắt lần lượt tại . cắt tại cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác DHEC nội tiếp. Xác định tâm (DHEC).
2. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt tại . Chứng minh rằng: 5 điểm , cùng nằm trên 1 đường tròn.
3. Chứng minh: BHKC nội tiếp.
4. cắt tại . Chứng minh: thẳng hàng.

Bài 72: Cho tam giác nhọn nội tiếp . Hai đường cao và cắt nhau tại . Gọi là giao điểm của và .

1. Chứng minh: .
2. Đường tròn đường kính cắt tại . Chứng minh 5 điểm cùng thuộc một đường tròn.
3. Chứng minh: .
4. Từ vẽ đường thẳng vuông góc với tia tại . Chứng minh: .
5. Gọi là trung điểm . Chứng minh: thẳng hàng.

Bài 73: Cho tam giác vuông tại . Trên lấy điểm và . Vẽ đường tròn đường kính . Gọi là giao điểm thứ hai của cạnh với đường tròn. Nối kéo dài cắt đường tròn tại điểm thứ hai là . Đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ hai .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh: khi chuyền động trên thì có số đo không đổi.
3. Chứng minh: .

A black and white sign

Description automatically generated

**3in Tap SÜ DUNO cos tio :00) Uf WUYE VA DAY GUNO TRONO TÜ GrLO NollUE:**

Bài 74: Cho điềm thuộc đường tròn tâm đường kính . Vẽ tiếp tuyến của đường tròn tâm tại (sao cho ).

1. Chứng minh: .
2. Lấy điểm thuộc cung lớn . Chứng minh: .

Bài 75: Cho đường tròn tâm và điềm ở ngoài đường tròn. Qua kẻ các tiếp tuyến là tiếp điềm) và cát tuyến , tia nằm giữa hai tia và tia . Vẽ tại . Chứng minh:

1. .
2. , rồi suy ra .

Bài 76: Cho đường tròn tâm và điềm nằm ngoài đường tròn đó. kė các tiếp tuyến với đường tròn ( là tiếp điểm). Đường thẳng thay đổi đi qua , không đi qua và luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt và ( nằm giữa và )

1. Chứng minh: AMBO là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh: .

Bài 77: Từ điểm nằm ngoài đường tròn tâm , vẽ hai tiếp tuyến đến đường tròn tâm là hai tiếp điểm) và cát tuyến sao cho điểm nằm giữa và ; tia nằm giữa 2 tia và .

1. Chứng minh: .
2. Gọi I là trung điểm của . Chứng minh: các tứ giác nội tiếp.

Bài 78: Cho đường tròn tâm , từ điểm ở bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến ( là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến không đi qua tâm ( nằm giữa và ; và nằm về hai phía so với cát tuyến ).

1. Chứng minh: tứ giác MAOB nội tiếp.
2. Chứng minh: .
3. Gọi là giao điểm cúa và . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và là phân giác của .

Bài 79: Cho đường tròn có dây cung song song với tiếp tuyến tại . Lấy điềm thuộc cung nhỏ . Tia cắt tiếp tuyến ở . Đoạn thẳng cắt ờ . Tia cắt ơ .

1. bằng những góc nào?
2. Chứng minh: .IE và .IE. Nhận xét điểm .

Bài 80: Cho đường tròn tâm và điểm ờ ngoài đường tròn. Qua kẻ các tiếp tuyến , ( là hai tiếp điểm) và cát tuyến ). Gọi I là trung điểm của dây , là giao điềm thứ 2 giữa đường thẳng và đường tròn . Chứng minh:

1. Tứ giác BOIM nội tiếp. Xác định tâm cùa đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. và .
3. Ba điềm thẳng hàng, với là trung điểm của .

Bài 81 : . Từ ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến và ( và là hai tiếp điểm). Trền nửa mặt phẳng bờ có chứa vẽ cát tuyến không qua . là trung điềm của . Chứng minh:

1. và tứ giác nội tiếp.
2. .

Bài 82 : Cho điềm nằm ngoài đường thẳng . Vẽ vuông góc với ở . Lấy điểm thuộc đoạn thẳng . Trên đường tròn tâm bán kính bằng , lấy hai điểm và khác . Tia và tia lần lượt cắt ở và . Chứng minh: tứ giác nội tiếp (Huoóng dẫn: Vẽ tia tiếp tuyến tại của ).

Bài 83: Một điềm bên ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến đến đường tròn ( là các tiếp điềm). Vẽ cát tuyến nằm trong . Từ vẽ dây cung của song song với . Gọi là giao điểm của và . Chứng minh:

1. Tứ giác nội tiếp.
2. .
3. I là trung điểm của .

Bài 84: Từ điềm ngoài đường tròn , vẽ cát tuyến đến ( ). Các tiếp tuyến của tại và cắt nhau tại . Qua kė đường thẳng vuông góc với tại cắt (O) tại và ( nằm giữa và .

1. Chứng minh: tại và .
2. Chứng minh: tứ giác EMOF nội tiếp.
3. Chứng minh: là hai tiếp tuyến của .
4. Từ vẽ đường thẳng vuông góc với , cắt tại và cắt tại . Chứng minh: là trung điểm BP.

Bài 85 : Cho , tư điểm ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến với và cát tuyến . Gọi là giao điểm của và .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và vuông góc với .
2. Chứng minh: và tứ giác nội tiếp.
3. Tia DH cắt tại . Chứng minh: là tia phân giác của và .

Bài 86: Cho đường tròn và một diểm sao cho . Qua kẻ hai tiếp tuyến và của đường tròn , vơi và là hai tiếp điểm. Lấy điểm thuộc đường tròn sao cho song song với . Gọi là giao điểm thứ hai của đường thẳng và đường tròn . Tia cắt đường thẳng tại .

1. Chứng minh: là tứ giác nội tiếp và .
2. Kè đường kính của đường tròn . Chứng minh: tia là tia phân giác của .
3. Gọi là giao điểm của hai đường thẳng và . Tính độ dài đoạn thẳng theo bán kính R. ( )

Bà 87: Cho đường tròn , một điểm bất kì nằm trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại của đường tròn, lấy điểm sao cho . Từ kẻ tiếp tuyến với đường tròn (B là tiếp điểm); đường thẳng cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác MAOB nội tiếp.
2. Chứng minh: và tính theo .
3. Kė đường kính của cắt tại . Chứng minh: .
4. Gọi lần lượt là trung điểm của và . Chứng minh:

Bài 88: Từ điểm nằm ngoài , vẽ 2 tiếp tuyến là 2 tiếp điểm). Lấy thuộc cung cắt tại khác . Gọi là giao điểm của và .

1. Gọi là trung điềm của . Chứng minh: 5 điểm cùng thuộc 1 đường tròn.
2. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và là tia phân giác .

Bài 89: Qua điềm nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến của đường tròn , là hai tiếp điểm). Gọi là trung điểm của đoạn là giao điểm thứ hai của với đường tròn .

1. Chứng minh: tứ giác là tứ giác nội tiếp và .
2. Gọi là giao điểm thứ hai của đường thẳng với đường tròn . Chứng minh: và .
3. Chứng minh: và là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp .

Bài 90 : Cho đường tròn là điểm nằm ngoài đường tròn sao cho . Từ vẽ hai tiếp tuyến và đến đường tròn ( và là các tiếp điềm) và cát tuyến .

1. Chứng minh: MA.MB.
2. Gọi là trung điểm của , chứng minh: 5 điểm cùng thuộc một đường tròn.
3. Cho , tính theo . (gơi ý: Vẽ tai ?, ?)
4. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: tứ giác nội tiếp.

Bài 91 : Từ điềm ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn là tiếp điềm). Vẽ dây của đường tròn ) song song với cắt ( ) tại (khác D). Tia cắt tại . Chứng minh:

1. là tứ giác nội tiếp và cân tại .
2. và là trung điểm của .
3. là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp .

Bài 92 : Từ một điểm nằm ngoài . Vẽ hai tiếp tuyến với là 2 tiếp điểm). Gọi là trung điểm của . cắt tại cắt tại . Gọi là giao điểm của và .

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: tứ giác BHCI nội tiếp.
3. Chứng minh: .
4. Tiếp tuyến tại và của cắt nhau tại . Chứng minh: thẳng hàng.

Bài 93: Cho đường tròn đường kính , điểm ở bên ngoài đường tròn với . Vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn ( và là hai tiếp điểm).

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và xác định tâm của đường tròn này.
2. Chứng minh: đều.
3. Vẽ vuông góc với (H thuộc ). Gọi là trung điểm của . cắt đường tròn tại . cắt đường tròn tại . Chứng minh: .
4. Chứng minh: đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp .

Bài 94: Cho tam giác có 3 góc nhọn nội tiếp . Gọi là các đường cao cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và xác định tâm của đường tròn này.
2. Chứng minh: là tâm đường tròn nội tiếp .
3. Chứng minh: .
4. Đường thẳng cắt tại hai điểm và ( nằm giữa và ). Chứng minh: là một tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp .

A black square with white text

Description automatically generated



Bài 95: Phuoơng tich của điềm đối với đurờng tròn: Cho đường tròn tâm bán kính . Cho điểm cố định bên trong đường tròn khác . Vẽ đường kính đi qua . Cho dây cung quay quanh điểm .

1. Chứng minh: MA.MB .
2. Chứng minh: đồng dạng với .
3. Chứng minh rằng: với vị trí bất kỳ của dây đi qua thì .

Ghi chú: Giá trị được gọi là phương tích của đối với .

Bài 96: Phuơng tich của điểm đối với đuờng tròn: Cho đường tròn tâm bán kính . Cho điểm cố định nằm ngoài . Tia cắt tại và nằm giữa và . Tia di động cắt tại và nằm giữa và .

1. Chứng minh: MA.MB .
2. Chứng minh: đồng dạng với .
3. Có nhận xét gì về tích [MC.MD](http://MC.MD) khi tia Mx quay?

Ghi chú: Giá trị [MC.MD](http://MC.MD) được gọi là phương tích của đối với .

Bài 97: Phuơng tích của điểm đối với đioờng tròn: Cho đường tròn tâm bán kính . Cho điểm cố định nằm ngoài . Vẽ tiếp tuyến (T là tiếp điểm). Tia di động cắt tại và nằm giữa và . Chứng minh: đồng dạng với và .

Bài 98: Cho hai đường tròn và ') cắt nhau ở và . Điểm nằm ngoài hai đường tròn và thuộc đường thẳng . Từ vẽ tiếp tuyến của và tiếp tuyến của và là hai tiếp điểm). Chứng minh: . Có nhận xét gì về phương tích của điểm đối với hai đường tròn?

Ghi chú: Đường thẳng được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.  
ßài 99: Cho tam giác có và nội tiếp trong đường tròn tâm . Giả sử trên tia đối của tia có điểm sao cho . Vẽ tiếp tuyến của (với là tiếp điểm thuộc cung không chứa ). Chứng minh: và là tiếp tuyến của .

Bài 100: Từ điềm bên ngoài đường tròn , kè các tiếp tuyến đến là hai tiếp điểm). Gọi là giao điểm của và , kẻ dây cung của qua (D thuộc nhò).

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: .

Bài 101: Cho có dây song song với tiếp tuyến tại của đường tròn. Lấy điểm thuộc cung không chứa . Tia cắt tiếp tuyến ở cắt ở . Tia cắt đoạn thẳng ờ . Chứng minh:

1. và .
2. I là trung điểm của đoạn thẳng .

Bài 102: Cho điểm nằm ngoài đường tròn tâm . Vẽ hai tiếp tuyến và của và là hai tiếp điềm). Vẽ dây cung song song với . cắt tại . cắt tại I. Chứng minh: .ID và là trung điểm của .

Bài 103: Cho tam giác nhọn nội tiếp có . Gọi là giao điểm của ba đường cao và . Đường thẳng cắt đường thẳng tại . KA cắt đường tròn ( ) tại M. Chứng minh:

1. và .
2. .

Bài 104: Cho điềm nằm ngoài đường tròn tâm . Vẽ hai tiếp tuyến và của và là hai tiếp điềm). Kẻ đường kính của cắt tại điềm thứ hai là . Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: và .

Bài 105: Cho đường tròn tâm có hai dây cung và cắt nhau tại I nằm bên trong ( ). Gọi là trung điểm của và là điểm đối xứng với qua . Chứng minh: .ID và .IN .

Bài 106: Cho đường tròn , từ điềm nằm ngoài vẽ hai tiếp tuyến là tiếp điềm). Vẽ đường kính của cắt tại khác . cắt tại . Chứng minh:

1. taii và .
2. .

Bài 107: Cho điểm bên ngoài đường tròn tâm . Vẽ hai tiếp tuyến và của và là hai tiếp điểm). Vẽ đường tròn tâm đi qua và tiếp xúc với tại . Đường tròn cắt tại điểm thứ hai là . Tia cắt ở . Chứng minh:

1. .
2. IT vuông góc với .

Bài 108: Cho là đường phân giác của tam giác ( thuộc ). Chứng minh ,

Huớng dẫn: cắt đường tròn tại . Chứng minh .

Bài 109: Cho tam giác có đường trung tuyến và đường phân giác trong . Giả sử đường tròn cắt hai đường thẳng và lần lượt tại và . Chứng minh:

1. .
2. .

|  |  |
| --- | --- |
| LHAM  KHLOO | A sign with white letters  Description automatically generated |

Bài 110: Cho tam giác có 3 góc nhọn và nội tiếp đường tròn tâm . Các đường cao của tam giác cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp.
2. Gọi là giao điểm của và , đường thẳng cắt tại điểm thứ hai là khác A. Chứng minh: [MI.MA](http://MI.MA) = [MB.MC](http://MB.MC) và tứ giác nội tiếp.

Bài 111: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao cắt nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác .
2. Hai đường thẳng và cắt nhau tại . Chứng minh: .
3. Vẽ đường kính . Gọi là trung điểm của . Chứng minh: tứ giác là hình bình hành và đi qua trung điềm của .
4. SA că̆t tại . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và ba điểm thẳng hàng.

Bài 112: Cho tam giác nhọn nội tiếp . Các đường cao cắt nhau tại .

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp và xác định tâm của đường tròn này.
2. Đường thẳng cắt tại , cắt tại và nằm giữa và . Chứng minh: [MK.MT](http://MK.MT) ME.MF.
3. Chứng minh: tứ giác IDKT nội tiếp.
4. cắt tại . Chứng minh: .

Bài 113: Cho đường tròn , từ điềm nằm ngoài vẽ hai tiếp tuyến là tiếp điểm). Vẽ đường kính của cắt tại . cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác nội tiếp và .MD.
2. Chứng minh: [MO.MH](http://MO.MH) = [MC.MD](http://MC.MD).
3. cắt tại khác ). Chứng minh: tứ giác COIM nội tiếp.
4. Kẻ là đường kính của . Chứng minh: tứ giác nội tiếp và thẳng hàng.

Bài 114: Điểm bên ngoài đường tròn , kẻ các tiếp tuyến đến là hai tiếp điểm). Gọi là giao điểm của và , kẻ dây cung của qua (D) thuộc cung nhỏ ). Chứng minh:



1. MO là tia phân giác của .

Bài 115: Cho đường tròn dây cố định. Điểm di động trên cung lớn sao cho tam giác nhọn. Các đường cao cắt nhau tại . Gọi là giao điểm của với .

1. Chứng minh: tứ giác BCEF nội tiếp và tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh: .
3. Gọi là giao điểm của với . Chứng minh: .

Bài 116: Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp . Vẽ hai đường cao và . Tiếp tuyến tại cắt tại cắt tại .

1. Chứng minh: tứ giác EFBC nội tiếp và .
2. IA cắt tại . Chứng minh: , từ đó suy ra tứ giác nội tiếp.
3. Chứng minh: tứ giác IMFB nội tiếp.
4. Gọi là trung điểm . Chứng minh: đi qua trung điểm của .