**§2. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

**I. Đ!NH NGHĨA**

**Kiến thức cần nhớ**

* Nếu đường thẳng $a$ và đường tròn $(O)$ :
* Không có điểm chung thì ta nói a và (O) không giao nhau.
* Có duy nhất một điểm chung $C$ thì ta nói a tiếp xúc với $(O)$ tại $C$, khi đó a là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ và $C$ là tiếp điểm.
* Có hai điểm chung $A,B$ thì ta nói $a$ cắt $(O)$, $a$ là cát tuyến của đường tròn $(O)$ và $A,B$ là hai giao điềm.

Nhận xét: Cho đường tròn $(O;R)$. Gọi $d$ là khoảng cách từ điểm $O$ đến đường thẳng $a$

Ta có kết quả sau:

Đường thẳng $a$ và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau khi $d>R$.

Đường thẳng $a$ tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ khi $d=R$.

Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ khi $d<R$.



a)



b)



c)

Ví du 1: Cho đường thẳng $d$ và một điểm $O$ cách $d$ một khoảng $t=9 cm$. Xác định vị tri tương đối của $d$ với các đường tròn sau:
a) Đường tròn $(O;6 cm)$;
b) Đường tròn $(O;9 cm)$;
c) Đường tròn $(O;12 cm)$.

Hrớng dẫn giải:

a) Ta có: $t=9 cm,R=6 cm$. Vi $t>R$ nên d và đường tròn $(O;6 cm)$ không giao nhau.

b) Ta có: $t=9 cm,R=9 cm$. Vì $t=R$ nên d tiếp xúc với $(O;6 cm)$.

c) Ta có: $t=9 cm,R=12 cm$. Vi $t<R$ nên $d$ cắt dường tròn $(O;6 cm)$ tại 2 diểm phân biệt.

Ví du 2: Cho đường thẳng $b$ và một điểm $O$ cách $b$ một khoảng $5 cm$. Vẽ đường tròn tâm $O$, bán kính $7 cm$.

a) Giải thích vì sao b và $(O)$ cắt nhau.

b) Gọi $M$ và $N$ là các giao điểm của đường thẳng $b$ và đường tròn $(O;7 cm)$. Tính độ dài của dây $MN$.

**Htrớng dẫn giäi:**

a) Vẽ $OH$ vuông góc với a tại $H$.

Ta có: $OH=5 cm,R=7 cm$, suy ra $OH<R$, suy ra b cắt $(O;7 cm)$ tại hai điểm.

b) Do $M,N$ thuộc $(O)$ nên ta có $OM=ON=R$, suy ra tam giác $OMN$ cân tại $O$, có $OH$ là đường cao đồng thời là đường trung tuyến.

Do đó, $H$ là trung điểm của dây $MN$.

Xét $△OMH$ vuông tại $H$, ta có:

$MH^{2}+OH^{2}=OM^{2}$ (định lí Pythagore)



$⇒MH=\sqrt{OM^{2}-OH^{2}}=\sqrt{7^{2}-5^{2}}=2\sqrt{6}( cm)$,

suy ra $MN=2MH=2⋅2\sqrt{6}=4\sqrt{6}( cm)$.

**II. DẤU HIỆU NHẬN BIÉTT TIÉP TUYÉN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

Một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn khi nó đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

Tiếp tuyến có các tính chất như sau:

Tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến tiếp tuyến luôn bằng bán kính của đường tròn đó.

Ví du 3: Một người quan sát đặt mắt ở vị trí $A$ có độ cao cách mặt nước biền h là đoạn $AB$. Tầm nhìn xa tối đa là đoạn thẳng $AC(C$ là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ qua $A$, xem hình vẽ). Cho biết bán kính Trái Đất là $OB=OC$ $≈6400 km$ và $AC=40 km$. Hãy tính độ dài $AB$.

Huớng dẫn giải:

Xét $△ACO$ vuông tại $C$, ta có:

$AO^{2}=AC^{2}+OC^{2}$ (định ly Pythagore)

$$⇒OA=\sqrt{AC^{2}+OC^{2}}⇒OA=\sqrt{40^{2}+6400^{2}}( km)$$



Ta có: $OA=OB+BA(B\in OA)$

$$⇒BA=AO-OB⇒BA=\sqrt{40^{2}+6400^{2}}-6400⇒BA≈0,125( km)⇒BA≈125( m)$$

**III. TÍNH CHÁT CỦA HAI TIÉP TUYÉN CÂT NHAU**

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thi:

$⋄$ **Kiến thức cần nhớ**

* Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
* Tia kẻ từ điềm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
* Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điềm.

Vi dụ 4: Hai tiếp tuyến tại $B$ và $C$ của $(O;3 cm)$ cắt nhau ở $A$.

a) Chứng minh: $OA$ vuông góc với $BC$.

b) Biết $OA=5 cm$. Tính $\hat{BAC}$.

**Huớng dẫn giải.**

a) Xét ( $O)$, ta có:

Hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ cắt nhau tại $A(gt)$

$$⇒AB=AC$$

Ta có: $\left\{\begin{matrix}OB=OC( bán kính (O))\\AB=AC (chứng minh trên) \end{matrix}\right.$

$⇒OA$ là đường trung trực của đoạn $BC$

$⇒OA$ vuông góc với $BC$

b) Xét $△ABO$ vuông tại $B$, ta có:

$$sin⁡\hat{BAO}=\frac{OB}{OA}(TSLG)$$



$$⇒sin⁡\hat{BAO}=\frac{3}{5}⇒\hat{BAO}≈37^{∘}$$

Xét (O), ta có:

Hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ cắt nhau tại $A$ (gt)

$⇒AO$ là tia phân giác của $\hat{BAC}$

$⇒\hat{BAC}=2\hat{BAO}=2.37^{∘}=74^{∘}$.

**BÀI TÂP CƠ BẢN**

Bài 1: Cho đường tròn $(T;10 cm)$ và đường thẳng $q$. Gọi $M$ là chân đường vuông góc vẽ từ $T$ xuống $q,d$ là độ dài của đoạn thẳng $TM$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng $q$ và đường tròn $(T;10 cm)$ trong mỗi trường hợp sau:

1. $d=5 cm$;
2. $d=10 cm$;
3. $d=15 cm$.

Bài 2: Điền vào chỗ .... trong bảng dưới đây bằng một độ dài hoặc một khẳng định thích hợp.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bán kính của $(O)$ | Khoàng cách từ $O$đến đường thằng $b$ | Vị trí tương đối của $(O)$và đường thẳng $b$ |
| $$12 cm$$ | $$9 cm$$ | .................. |
| $$7 cm$$ | ................. | $(O)$ và b tiếp xúc |
| $$5 cm$$ | $$8 cm$$ | ................... |

Bài 3: Cho đường tròn $(O;12 cm)$ và điểm $M$ cách $O$ là $8 cm$. Hãy xác định vị trí tương đối của $(O)$ và đường thẳng $d$ đi qua $M$ vuông góc $OM$.

Bài 4: Cho đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ và một điểm $S$ nằm trong $(O)(OS<R)$. Vẽ đường thẳng $a$ bất kì đi qua $S$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng $a$ và đường tròn $(O$ ).

Bài 5: Cho đường tròn $(O;R)$ và điềm $M$ nằm ngoài đường tròn. Từ $M$ vẽ tiếp tuyến $MA$ đến $(O;R)$ (với $A$ là tiếp điểm). Đoạn thẳng $OA$ cắt $(O;R)$ tại $K$. Biết $MA=8 cm$ và $MK=4 cm$.

1. Tính bán kính $R$ của đường tròn ( $O$ ).
2. Tính chiều dài cạnh $OM$ của tam giác $AOM$.

Bài 6: Cho tam giác $ABC$ có $AB=3 cm,AC=4 cm,BC=5 cm$. Vẽ đường tròn ( $B;BA)$. Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 7: Cho đường tròn tâm $O$ có bán kính bằng $5 cm$ và điểm $B$ cách $O$ một khoảng $13 cm$. Lấy điểm $A$ thuộc $(O)$ sao cho $AB=12 cm$.

1. $△OAB$ là tam giác gi?
2. Chứng minh: BA tiếp xúc với $(O)$.

Bài 8: Cho đường tròn $(O)$, điểm $S$ nằm ngoài $(O)$ sao cho $SA$ và $SB$ là hai tiếp tuyến $(A$, B là hai tiếp điểm) thoà mãn $\hat{ASB}=60^{∘}$. Biết chu vi tam giác $SAB$ là $15 cm$.

1. Chứng minh: tam giác $SAB$ đều và tính độ dài dây $AB$.
2. Tính bán kính của đường tròn $(O)$.

Bài 9: Từ điềm $A$ ngoài đường tròn tâm $O$, vẽ tiếp tuyến với tiếp điềm $B$. Lấy điểm $C$ thuộc (O) khác $B$ sao cho $AB=AC$.

1. So sánh $△OAB$ và $△OAC$.
2. Chứng minh: $AC$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 10: Lấy hai điểm $A$ và $B$ cùng thuộc đường tròn tâm $O(A,O,B$ không thẳng hàng). Tiếp tuyến của $(O)$ tại $A$ cắt tia phân giác của $\hat{AOB}$ tại $C$.

1. So sánh $△OAC$ và $△OBC$.
2. Chứng minh: đường thẳng $BC$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 11: Từ điểm $M$ ngoài đường tròn tâm $O$, vẽ tiếp tuyến $MA$ đến $(O)(A$ là tiếp điểm). Từ $A$ vẽ dây cung $AB$ vuông góc với $OM$ tại $H$.

1. Chứng minh: $OM$ là tia phân giác của $\hat{AOC}$.
2. So sánh $△OAM$ và $△OBM$. Chứng minh: đường thẳng $MB$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 12: Trên tiếp tuyến tại $A$ của $(O)$, lấy điểm $B$ sao cho $AB=AO$. Lấy điểm $C$ khác $A$ và thuộc ( $O$ ) sao cho $BA=BC$.

1. So sánh $△OBA$ và $△OBC$.
2. Chứng minh: tứ giác $OABC$ là hình vuông và $BC$ tiếp xúc với $(O)$.

Bài 13: Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính $AB$. Vẽ dây $AM$ sao cho $AM=R$. Gọi $K$ là trung điểm của dây $MB$. Đường thẳng $OK$ cắt tiếp tuyến $Bx$ tại $E$. Chứng minh:

1. Tam giác MAB vuông, từ đó suy ra độ dài của $MB$ theo $R$.
2. $OE$ là tia phân giác của $\hat{MOB}$.
3. EM là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

Bài 14: Cho $(O)$ và một điểm $A$ nằm ngoài đường tròn $(O)$. Từ $A$ vẽ hai tiếp tuyến $AB,AC$ của đường tròn $(O)(B,C$ là hai tiếp điểm). Gọi $H$ là giao điểm của $OA$ và $BC$.

1. Chứng minh: $OA⊥BC$ tại $H$.
2. Từ $B$ vẽ đường kính $BD$ của $(O)$, đường thẳng $AD$ cắt $(O)$ tại $E$ (khác $D$ ). Chứng minh: $AE.AD=AH.AO$.

Bài 15: Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A(AB>AC)$. Vẽ đường tròn tâm $O$, đường kính $AB$; $BC$ cắt đường tròn $(O)$ tại $H$.

1. Gọi $K$ là trung điểm của $AC$. Chứng minh: $△ABH$ vuông, từ đó suy ra $KO⊥AH$.
2. Chứng minh: $△AOK=△HOK$. Từ đó suy ra: $KH$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.

Bài 16: Trên tiếp tuyến tại $A$ của đường tròn $(O)$ bán kính bằng $R$, lấy điểm $I$ sao cho $AI=R\sqrt{3}$. Lấy điểm $B$ khác $A$ và thuộc $(O)$ sao cho $IB=IA$.

1. Tính $tan⁡\hat{AIO}$.
2. Tính $\hat{AIB}$ và chứng minh: $IB$ tiếp xúc với $(O)$.
3. Kéo dài $BO$ cắt tia $IA$ ờ $K$. Dùng ti số lượng giác, hãy tính các cạnh của $△IBK$ theo $R$.

Bài 17: Trên tiếp tuyến tại $B$ của đường tròn $(O)$ bán kính bằng $R$, lấy điểm $A$ cách $O$ một khoảng bằng $2R$. Lấy điểm $C$ khác $B$ và thuộc $(O)$ sao cho $AB=AC$. $BC$ cắt $OA$ tại $H$.

1. Tính $sin⁡\hat{OAB}$ và tính $\hat{BAC}$.
2. Tính $BC$ theo $R$ và chứng minh: $AC$ tiếp xúc với $(O)$.
3. Đường thẳng $OA$ là gì đối với đoạn thẳng $BC$ ? Tại sao? Tính $OH,HA$.

Bài 18: Hai tiếp tuyến tại $B$ và $C$ của đường tròn $(O)$ cắt nhau ở $A$. Từ $O$ kẻ tia vuông góc với $OB$ cắt $AC$ tại $D$. Chứng minh: $OD//AB$ và $DO=DA$.

Bài 19: Cho đường tròn tâm $O$ bán kính bằng $R$. Lấy điểm $A$ cách $O$ một khoảng bằng $2R$. Từ $A$ vẽ hai tiếp tuyến với hai tiếp điểm là $B$ và $C$. Đoạn thẳng $OA$ cắt $(O)$ tại $I$. Đường thẳng qua $O$ và vuông góc với $OB$ cắt $AC$ tại $K$. Chứng minh:

1. $OK//AB$ và $△OAK$ cân ở $K$.
2. Đường thẳng $KI$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 20: Hai tiếp tuyến tại $A$ và $B$ của đường tròn $(O)$ cắt nhau ở $I$. Đường thẳng qua $I$ và vuông góc với $IA$ cắt tia $OB$ tại $K$. Chứng minh:

1. $IK//OA$
2. $△IOK$ cân.

Bài 21: Cho đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ có đường kính $AB$. Từ điểm $T$ trên tiếp tuyến tại $A$ của $(O)$, vẽ tiếp tuyến thứ hai $TM(M$ là tiếp diểm). Gọi $H$ và $K$ là hình chiếu vuông góc của $M$ lên $AB$ và tia $AT$. Chứng minh:

1. HK đi qua trung điềm I của AM.
2. Ba đường thẳng $OT,HK,AM$ đồng quy.

Bài 22: Cho đường tròn $(O)$, dây $AB$ khác đường kính. $Q$ ua $O$ kẻ đường vuông góc với $AB$, cắt tiếp tuyến tại $A$ của đường tròn ở điểm $C$.

1. Chứng minh: $CB$ là tiếp tuyến của $(O)$.
2. Cho bán kính của đường tròn bằng $15 cm,AB=24 cm$. Tính độ dài $OC$.

Bài 23: Cho đường tròn $(O)$ có bán kính $OA=R$, dây $BC$ vuông góc với $OA$ tại trung điểm $M$ của $OA$.

1. Tứ giác $OBAC$ là hình gì? Vì sao?
2. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại $B$, nó cắt đường thẳng $OA$ tại $E$. Tính độ dài $BE$ theo $R$.

Bài 24: Cho đường tròn $(O)$, điểm $A$ nằm ngoài $(O)$. Kẻ các tiếp tuyến $AM,AN$ với đường tròn $(M,N$ là các tiếp điểm).

1. Chứng minh: $OA⊥MN$.
2. Vẽ đường kính $NC$. Chứng minh: $MC//AO$.
3. Tính độ dài các cạnh của $△AMN$ biết $OM=3 cm,OA=5 cm$.

Bài 25: Cho đường tròn $(O;6 cm)$, điểm $N$ nằm ngoài $(O)$ sao cho hai tiếp tuyến $NA$ và $NB$ ( $A,B$ là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại $N$.

1. Chứng minh: tứ giác $NAOB$ là hình vuông và tính độ dài của $NA$ và $NB$.
2. Qua giao điểm $K$ của đoạn thẳng $ON$ và đường tròn $(O)$, vẽ một tiếp tuyến cắt $OA,OB$ lần lượt tại $P,Q$. Chứng minh: $K$ là trung điểm của đoạn $PQ$.
3. Chứng minh: $△OKP=△OAN$ và tính độ dài của $PQ$.

Bài 26: Cho đường tròn $(O)$, điểm $M$ nằm ngoài $(O)$. Kẻ tiếp tuyến $MD,ME$ với đường tròn $(D,E$ là các tiếp điểm). Qua điểm $I$ thuộc cung nhỏ $DE$, kè tiếp tuyến với đường tròn, cắt $MD$ và $ME$ theo thứ tự ở $P$ và $Q$. Biết $MD=4 cm$, tính chu vi $△MPQ$.

Bài 27: Cho tam giác $ABC$ nhọn. Vẽ đường tròn tâm $O$ đường kính $BC$ cắt $AB,AC$ lần lượt tại $E$ và $F$. $BF$ và $CE$ cắt nhau tại $H$. Gọi $I$ là giao điểm của $AH$ và $BC$.

1. Chứng minh: $AH⊥BC$ tại $H$.
2. Gọi $M$ là trung điểm $AH$. Chứng minh: $△MAF$ cân và $MF$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 28: Cho đường tròn $(O;3 cm)$ và điểm $A$ có $AO=5 cm$. Kè các tiếp tuyến $AB,AC$ với đường tròn $(B,C$ là các tiếp điểm $)$. Gọi $H$ là giao điểm của $AO$ và $BC$.

1. Tính độ dài $OH$.
2. Qua điểm $M$ bất kỳ thuộc cung nhỏ $BC$, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt $AB$ và $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $E$. Tính chu vi $△ADE$.

Bài 29: Cho đường tròn tâm $O$ có dây $AB$. Bán kính $OM$ vuông góc với dây $AB(M$ thuộc cung nhỏ $AB)$. Tiếp tuyến của $O)$ tại $A$ cắt tia $OM$ ờ $C$. Chứng minh: $AM$ là tia phân giác $\hat{BAC}$.

Bài 30: Cho đường tròn $(O;2 cm)$, các tiếp tuyến $AB$ và $AC$ kẻ từ $A$ đến đường tròn vuông góc với nhau tại $A(B$ và $C$ là các tiếp điểm).

1. Tứ giác $ABOC$ là hình gì? Vì sao?
2. Gọi $M$ là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ $BC$. Qua $M$ kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt $AB$ và $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $E$. Tính chu vi $△ADE$.
3. Tính số đo $\hat{DOE}$.

Bài 31: Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Vẽ đường tròn $(A;AH)$. Kè các tiếp tuyến $BD,CE$ với đường tròn $(D,E$ là các tiếp điểm khác $H)$. Chứng minh rằng:

1. Ba điểm $D,A,E$ thẳng hàng.
2. $DE$ tiếp xúc với đường tròn có đường kính $BC$.

Bài 32: Chứng minh rằng nếu tam giác $ABC$ có chu vi 2 p, bán kính đường tròn nội tiếp $△ABC$ bằng $r$ thì diện tích $S$ cùa tam giác có công thức: $S=$ p.r.

Bài 33: Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Đường tròn $(O)$ nội tiếp tam giác $ABC$ tiếp xúc với $AB,AC$ lần lượt tại $D,E$.

1. Tứ giác $ADOE$ là hình gì? Vì sao?
2. Tính bán kính của $(O)$ biết $AB=3 cm,AC=4 cm$.

**BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

Bài 34: Cho $(O;R)$ đường kính $AB$. Gọi $C$ là điểm thuộc đường tròn $(O)$ sao cho $AC>BC$.

1. Chứng minh: $△ABC$ vuông.
2. Tiếp tuyến tại $A$ và $C$ của $(O)$ cắt nhau tại $D$. Chứng minh: $OD⊥AC$.

Bài 35: Cho đường tròn $(O;R)$, dây cung $AB$ không qua tâm. Vẽ các tiếp tuyến tại $A$ và $B$ của $(O)$ cắt nhau tại $C$.

1. Chứng minh: $OD⊥AB$.
2. Vẽ đường kính $AD$ của $(O)$. Chứng minh: $BD//OC$.

Bài 36: Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm $A$ nằm ngoài đường tròn $(O)$ sao cho $OA=2R$. Từ $A$ vẽ tiếp tuyến $AB$ của đường tròn $(O)$ ( $B$ là tiếp điểm).

1. Chứng minh: $△ABO$ vuông tại $B$ và tính độ dài $AB$ theo $R$.
2. Từ $B$ vẽ dây cung $BC$ của $(O)$ vuông góc với cạnh $OA$ tại $H$. Chứng minh: $AC$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.

Bài 37: Cho $AB$ là đường kính của $(O)$ bán kính $R$. Cho dây $BC=R$. Tiếp tuyến của $(O)$ tại $A$ cắt tia $BC$ ở $D$. Tiếp tuyến của $(O)$ tại $C$ cắt $AD$ ở $M$.

1. Tính $\hat{ABC}$ và dùng tỉ số lượng giác để tính $AD$ theo $R$.
2. Tính $\hat{AOM}$ và tính AM theo R.

Bài 38: Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính $AB$, vẽ hai tiếp tuyến $Ax$ và By với đường tròn $(O;R)$. Qua điểm $M$ trên đường tròn $(M\ne A,B)$, vẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn $(O;R)$ tiếp tuyến này cắt $Ax;By$ lần lượt tại $C,D$.

1. Tính số đo $\hat{AMB}$ và chứng minh: $AC+BD=CD$.
2. Chứng minh: $\hat{COD}=90^{∘}$ và $AC.BD=R^{2}$.

Bài 39: Từ điểm $A$ ở ngoài đường tròn $(O)$ kẻ tiếp tuyến $AB$ với đường tròn ( $B$ là tiếp điềm). Gọi $I$ là trung điểm của đoạn $AB$, kẻ tiếp tuyến $IM$ với đường tròn $(O)(M$ là tiếp điểm). Vẽ đường kính $BC$ của đường tròn $(O)$. Chứng minh:

1. $△AMB$ là tam giác vuông.
2. Chứng minh: 10 song song với $AM$.

Bài 40: Cho $AC$ là đường kính của đường tròn tâm $O$. Trên tiếp tuyến của (O) tại $A$, lấy điểm $I$. Vẽ dây cung $CB$ song song với $OI$. Chứng minh:

1. $\hat{IOA}=\hat{IOB}$.
2. Đường thẳng $IB$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 41: Từ điềm $M$ nằm bên ngoài đường tròn $(O)$ vẽ hai tiếp tuyến $MA,MB$ đến $(O)(A,B$ là tiếp điểm). $MO$ cắt $AB$ tại $I$.

1. Chứng minh : Bốn điểm $M,A,O,B$ cùng thuộc một đường tròn và $MO⊥AB$ tại $I$.
2. Kè đường kính $AC$ của $(O),MC$ cắt $(O)$ tại $H(H$ khác $C)$. Chứng minh: $\hat{AHC}=90^{∘}$ và $△MIH∼△MCO$.
3. $KẻBK⊥AC$ tại $K$. Gọi $E,F$ lần lượt là giao điểm của $MC$ với $AB$ và $MC$ với $BK$. Chứng minh : $BE$ là đường phân giác trong của $△BFM$ và $EM.CF=EF.CM$.

Bài 42: Từ $A$ ngoài $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ với $(O)(B,C$ là tiếp điểm). Vẽ dây $BD$ cùa $(O)$ sao cho $BD$ song song với $AO$.

1. Chứng minh: $OA⊥BC$.
2. Chứng minh: ba điềm $C,O,D$ thẳng hàng.
3. $AD$ cắt $(O)$ tại $E,AO$ cắt $BC$ tại $H$. Chứng minh: $HB$ là tia phân giác của $\hat{EHD}$.

Bài 43: Cho $(O)$ đường kính $AB$. Lấy điềm $H$ trên $OB$ ( $H$ khác $O$ và $B$ ). Trên đường thẳng, vuông góc với $OB$ tại $H$, lấy $M$ ngoài $(O)$, MA cắt $(O)$ tại $C,MB$ cắt $(O)$ tại $D$.

1. Tính: $\hat{ACB};\hat{ADB}$.
2. $MH$ cắt $BC$ tại $I$. Chứng minh: $A,I,D$ thẳng hàng.
3. Chứng minh: $M,C,I,D$ cùng nằm trên một đường tròn.
4. Gọi $E$ là trung điềm của $MI$. Chứng minh: $EC$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 44: Cho điềm $A$ nằm ngoài đường tròn $(O)$. Từ $A$ kẻ tiếp tuyến $AB$ đến đường tròn ( $B$ là tiếp điểm). Kẻ dây $BC$ vuông góc $OA$ tại $H$.

1. Chứng minh: $AC$ là tiếp tuyến tại $C$ của $(O)$.
2. Từ $B$ vẽ đường thẳng song song với $OA$; cắt $(O)$ tại $D(D$ khác $B$ ). Chứng minh: $CD$ là đường kính của $(O)$.
3. Gọi $K$ là giao điềm thứ hai của $AD$ và $(O)$. Chứng minh: $\hat{ODH}=\hat{OKH}$.

Bài 45: Cho $(O,R)$ đường kính $AB$ và một điểm $M$ nằm trên $(O;R)$ với $MA<MB$ ( $M$ khác $A$ và $B$ ). Tiếp tuyến tại $M$ của $(O;R)$ cắt tiếp tuyến tại $A$ và $B$ của $(O;R)$ theo thưu tự ở $C$ và $D$.

1. Chứng minh: tứ giác $ACDB$ là hình thang vuông.
2. $AD$ cắt $(O,R)$ tại $E$, $OD$ cắt $MB$ tại $N$. Chứng minh: $OD$ vuông góc với $MB$ và DE.DA $=$ [DN.DO](http://DN.DO).
3. Đường thẳng vuông góc với $AB$ tại $O$ cắt đường thẳng $AM$ tại $F$. Chứng minh: tứ giác OFDB là hình chữ nhật.
4. Cho $AM=R$. Tính theo $R$ diện tích tứ giác $ACDB$.

Bài 46: Cho $(O,R)$ và điểm A ngoài $(O)$ sao cho $OA=2R$. Từ $A$ vẽ hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ đến $(O)$ với $B,C$ là hai tiếp điểm. Chứng minh:

1. $AO$ là đường trung trực của đoạn $BC$.
2. $△ABC$ đều. Tính $BC$ theo $R$.
3. Đường vuông góc với $OB$ tại $O$ cắt $AC$ tại E. Đường vuông góc với $OC$ tại $O$ cắt $AB$ tại $F$. Chứng minh: tứ giác $AEOF$ là hình thoi và $EF$ là tiếp tuyến của $(O;R)$.

Bài 47: Từ điểm $A$ ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến $AB,AC$ đến $(O;R)$ với $B,C$ là các tiếp điềm. Tia $AO$ cắt dây $BC$ tại $H$.

1. Chứng minh: $OA$ là trung trực của đoạn thẳng $BC$ và $AB^{2}=AH.AO$.
2. Vẽ đường kính $BD$ của $(O;R)$. Gọi $M$ là trung điểm của $CD$. Chứng minh: $OMCH$ là hình chữ nhật.

Bài 48: Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AB=5 cm$ và $AC=4 cm$.

1. Giài tam giác $ABC$.
2. Kè đường cao $AH$ của tam giác $ABC$. Chứng minh: $BC$ là tiếp tuyến của $(A;AH)$.
3. Từ $H$ kẻ $HE⊥AB$ cắt $(A)$ tại $I$ và từ $H$ kẻ $HF⊥AC$ cắt $(A)$ tại $K$. Chứng minh: $BI$ là tiếp tuyến của $(A)$.
4. Chứng minh: 3 điểm $I,A,K$ thẳng hàng.

Bài 49: Cho $(O)$ đường kính $AB$. Lấy điểm $C$ thuộc $(O)$ với $C$ không trùng $A$ và $B$. Goi $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$. Vẽ tiếp tuyến tại $C$ của $(O)$ cắt tia $OI$ tại $D$.

1. Chứng minh: $OI//BC$.
2. Chứng minh: DA là tiếp tuyến $(O)$.
3. Vẽ $CH⊥AB,H\in AB$ và vẽ $BK⊥CD,K\in CD$. Chứng minh: $CK^{2}=HA.HB$.

Bài 50: Từ điểm $A$ ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến $AB,AC$ đến $(O)(B,C$ là các tiếp điểm).

1. Chứng minh: $OA$ vuông góc với $BC$ tại $H$.
2. Vẽ đường thẳng vuông góc với $OB$ tại $O$ cắt cạnh $AC$ tại $E$. Chứng minh: $△OAE$ là tam giác cân.
3. Trên tia đối của tia $BC$ lấy điểm $Q$. Vẽ hai tiếp tuyến $QM,QN$ đến $(O)(M,N$ là tiếp điểm). Chứng minh: 3 điểm $A,M,N$ thẳng hàng.

Bài 51: Cho điểm $A$ nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ 2 tiếp tuyến $AB,AC$ với đường tròn $(O)(B,C$ là các tiếp điểm). Vẽ đường kính $CD$ của đường tròn $(O)$.

1. Chứng minh: $OA⊥BC$ và $OA//BD$.
2. Gọi $E$ là giao điểm của $AD$ và đường tròn $(O)(E$ khác $D),H$ là giao điểm của $OA$ và $BC$. Chứng minh: $AE,AD=AH.AO$.
3. Chứng minh: $\hat{AHE}=\hat{OED}$.
4. Gọi $r$ là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Tính độ dài đoạn thẳng $BD$ theo R, r.

Bài 52: Cho $(O)$ và $A$ là điềm nằm ngoài $(O)$. Qua $A$ vẽ tiếp tuyến $AB,AC$ với $(O)(B,C$ là các tiếp điểm). $AO$ cắt $BC$ tại $M$.

1. Chứng minh: $OA$ là trung trực của đoạn $BC$.
2. Tính $BM$ biết $OM=2 cm$ và $AM=8 cm$.
3. Vẽ đường kính $BE;AE$ cắt $(O)$ tại $F$. Gọi $G$ là trung điểm của $EF$. Đường thẳng $OG$ cắt đường thẳng $BC$ tại $H$. Chứng minh: $OM.OA=OG.OH$.
4. Chứng minh: $EH$ là tiếp tuyến của $(O)$.

Bài 53: Từ điềm $A$ ngoài $(O)$, vẽ hai tiếp tuyến $AB,AC$ với đường tròn $(B,C$ là 2 tiếp điểm). $QuaO$ vẽ đường thẳng vuông góc với $OC$; qua $A$ vẽ đường thẳng này vuông góc với $AC$. Hai đường thẳng này cắt nhau tại $D$.

1. Chứng minh: $OA$ đi qua trung điểm $H$ của $BC$ và 5 điểm $A,D,B,O,C$ cùng nằm trên một đường tròn.
2. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $OD$ và $AH$. Chứng minh: $MN⊥CN$. (gơi ý: goi $T$ là trung điểm cúa $CH$ )
3. $OD$ cắt $AB$ tại $E$. Chứng minh: $OE.OD+AE⋅AB=OA^{2}$. (gơi ý: vẽ $MK⊥OA$ tại $K$ )

Bài 54: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB$. Gọi $Ax$ và By là các tia vuông góc với $AB$ (Ax và By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ $AB$ ). Qua điểm $M$ thuộc nửa đường tròn $(M$ khác $A$ và $B$ ) kẻ tiếp tuyến với đường tròn $O$ cắt $Ax$ và $By$ theo thứ tự tại $C$ và $D$. Chứng minh rằng:

1. $CD=AC+BD$.
2. Bốn điểm $D,M,O,B$ cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
3. Cho góc $\hat{MBA}=30^{∘}$. Tính diện tích $△AMB$ theo $R$.

Bài 55: Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính $AB$. Lấy điểm $M$ thuộc đường tròn $(O)(AM<MB)$. Tiếp tuyến tại $A$ của đường tròn $(O)$ cắt tia $BM$ tại $C$.

1. Chứng minh: $AC^{2}=CM.CB$.
2. Tia $CO$ cắt đường tròn $(O)$ lần lượt tại hai điểm $D$ và $E$ (điểm $D$ nằm giữa hai điểm $C$ và $O)$. Chứng minh: $CM⋅CB=CD.CE$.
3. Vẽ dây $AK$ vuông góc với $CO$ tại $H$. Chứng minh: $CK$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.

Bài 56: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB$ không đi qua tâm $O$. Gọi $H$ là trung điểm của $AB$.

1. Chứng minh: $OH⊥AB$.
2. Tiếp tuyến tại $A$ của đường tròn $O)$ cắt tia $OH$ tại điểm $K$. Vẽ đường kính $AC,CK$ cắt đường tròn $(O)$ tại $D$. Chứng minh: $CD⋅CK=4R^{2}$.
3. Chứng minh: $AK=\frac{AD^{2}}{2Rsin⁡C⋅cos⁡C}$.
4. Tiếp tuyến tại $C$ của đường tròn $(O)$ cắt đường thẳng $AB$ tại $E$. $OE$ cắt $CK$ tại điểm $I$. Chứng minh: $OH.OK=OI.OE$.

Bài 57: Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Đường tròn tâm $O$ đường kính $AB$ cắt $BC$ tại $D$.

1. Chứng minh: $AC^{2}=CD.BC$.
2. Gọi $I$ là trung điểm của $BD$. Tiếp tuyến tại $D$ cắt $AC$ ở $M$ và cắt $OI$ tại $N$. Chứng minh: $NB$ là tiếp tuyến của $(O)$.
3. $OM$ cắt $AD$ ở $K$. Chứng minh: $OK.OM=OI.ON$.
4. Gọi $Q$ là giao điểm của $MB$ và $AN$. Chứng minh: $DQ⊥AB$.

Bài 58: Cho đường tròn tâm $O$ có đường kính $BC$ và có bán kính bằng $R$. Tiếp tuyến của $(O)$ tại $A$ cắt đường thẳng $BC$ ờ $I$. Chứng minh:

1. $IB.IC=IO^{2}-R^{2}$.
2. $IB⋅IB=IA^{2}$.

Bài 59: Tiếp tuyến tại $M$ của $(O;R$ ) cắt dây $BC$ kéo dài tại $A$ ngoài $(O)$. Vẽ $OH$ vuông góc với $BC$ tại $H$.

1. Chứng minh: $AB+AC=2AH$.
2. Chứng minh: $AB+AC\geq 2AM$.

Bài 60: Trên nửa đường tròn tâm $O$ đường kính $AB$, lấy điểm $M$. Vẽ đường tròn tâm $M$ tiếp xúc với $AB$ tại $H$. Vẽ tiếp tuyến $AC$ và $BD$ của $(M)$ với $C$ và $D$ là hai tiếp điểm.

1. Tìm hai góc so le trong bằng nhau để chứng minh $OM//BD;OM//AC$.
2. Chứng minh $C,M,D$ thẳng hàng và đường thẳng $CD$ tiếp xúc với $(O)$.
3. Giä sử $CD=2a$. Tính $AC.BD$ theo $a$.

Bài 61: Cho $AC$ là đường kính của đường tròn tâm $O$. Trên tiếp tuyến tại $A$ của $(O)$, lấy điểm $I$ sao cho $IA$ lớn hơn bán kính của $(O)$. Tư I vẽ tiếp tuyến thứ hai với tiếp điểm $B$.

1. Chứng minh: $BC//OI$.
2. Đường thẳng vuông góc với $AC$ tại $O$ cắt tia $CB$ ở $H$. Chứng minh: $IH//AC$.
3. Tia $OB$ cắt tia $IH$ ở $K$. Chứng minh: $△IOK$ cân ở $K$.

Bài 62: Cho đường tròn tâm $O$ có dây cung $AB$ sao cho $\hat{AOB}$ tù. Tiếp tuyến của $(O)$ tại $A$ và dây $AB$ lần lượt cắt tia phân giác của $\hat{AOB}$ ở $C$ và $K$. Vẽ $BI$ vuông góc với $AC$ ở $I$ và cắt $OC$ ở $H$. Chứng minh:

1. H là trực tâm của $△ABC$.
2. $AH//OB$.
3. Tứ giác AHBO là hình thoi.

Bài 63: Cho tam giác $ABC$ nhọn, đường tròn tâm $O$ có đường kính $BC$ cắt $AB,AC$ lần lượt ở $D$ và $E$. Gọi $H$ là giao điểm của $BE$ và $DC,K$ là giao điểm của $AH$ và $BC$.

1. Tính số đo $\hat{BDC}$ và $\hat{BEC}$.
2. Chứng minh: Bốn điểm $A,D,H,E$ cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm $I$ của đường tròn.
3. Gọi $M$ là trung điểm của $HC$. Chứng minh: $IM⊥OM$.
4. Chứng minh: tiếp tuyến tại $D$ và $E$ của đường tròn $(O)$ cắt nhau tại $I$.

Bài 64: Cho $(O;R)$ đường kính $BD=2R$, trên tiếp tuyến tại $B$ của đường tròn $(O)$ lấy điểm $A$ sao cho $BA=R$. Từ $A$ vẽ tiếp tuyến $AC$ của $(O)(C$ là tiếp điểm và $C$ khác $B$ ).

1. Tính độ dài $OA$ theo $R$ và chứng minh: $OA//DC$.
2. Gọi $I$ là giao điểm của $OA$ và $BC$. Chứng minh: bốn điểm $A,B,O,C$ thuộc cùng một đường tròn và DC là tiếp tuyến của đường tròn tâm $I$ bán kính $IA$.