**§2. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

**I. Đ!NH NGHĨA**

**Kiến thức cần nhớ**

* Nếu đường thẳng và đường tròn :
* Không có điểm chung thì ta nói a và (O) không giao nhau.
* Có duy nhất một điểm chung thì ta nói a tiếp xúc với tại , khi đó a là tiếp tuyến của đường tròn và là tiếp điểm.
* Có hai điểm chung thì ta nói cắt , là cát tuyến của đường tròn và là hai giao điềm.

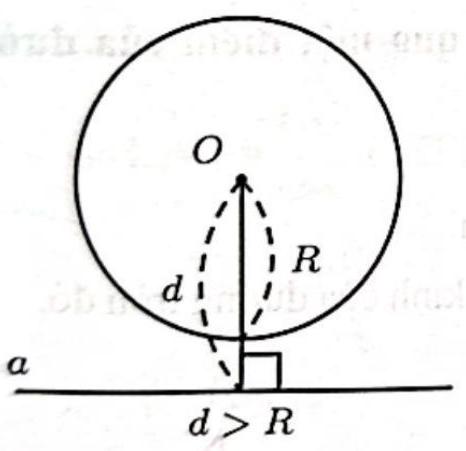
Nhận xét: Cho đường tròn . Gọi là khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Ta có kết quả sau:

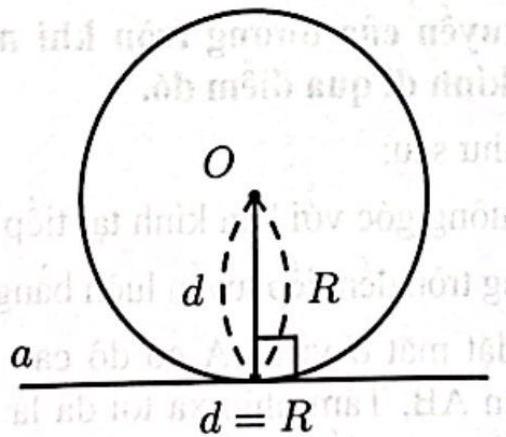
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau khi .

Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn khi .

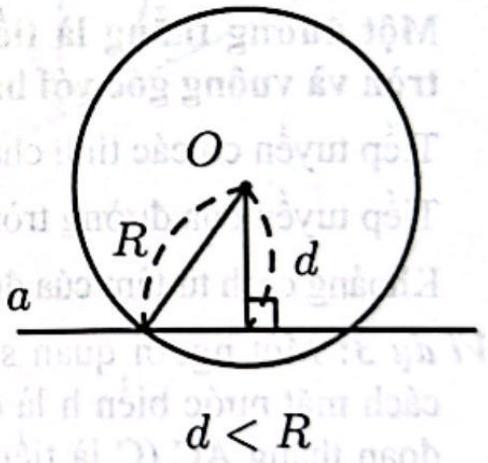
Đường thẳng a cắt đường tròn khi .



a)



b)



c)

Ví du 1: Cho đường thẳng và một điểm cách một khoảng . Xác định vị tri tương đối của với các đường tròn sau:  
a) Đường tròn ;  
b) Đường tròn ;  
c) Đường tròn .

Hrớng dẫn giải:

a) Ta có: . Vi nên d và đường tròn không giao nhau.

b) Ta có: . Vì nên d tiếp xúc với .

c) Ta có: . Vi nên cắt dường tròn tại 2 diểm phân biệt.

Ví du 2: Cho đường thẳng và một điểm cách một khoảng . Vẽ đường tròn tâm , bán kính .

a) Giải thích vì sao b và cắt nhau.

b) Gọi và là các giao điểm của đường thẳng và đường tròn . Tính độ dài của dây .

**Htrớng dẫn giäi:**

a) Vẽ vuông góc với a tại .

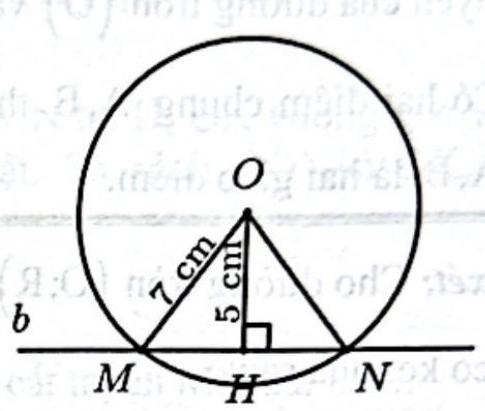
Ta có: , suy ra , suy ra b cắt tại hai điểm.

b) Do thuộc nên ta có , suy ra tam giác cân tại , có là đường cao đồng thời là đường trung tuyến.

Do đó, là trung điểm của dây .

Xét vuông tại , ta có:

(định lí Pythagore)



,

suy ra .

**II. DẤU HIỆU NHẬN BIÉTT TIÉP TUYÉN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

Một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn khi nó đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

Tiếp tuyến có các tính chất như sau:

Tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

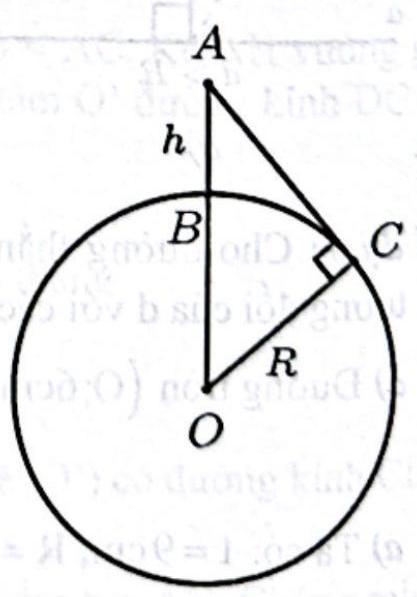
Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến tiếp tuyến luôn bằng bán kính của đường tròn đó.

Ví du 3: Một người quan sát đặt mắt ở vị trí có độ cao cách mặt nước biền h là đoạn . Tầm nhìn xa tối đa là đoạn thẳng là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ qua , xem hình vẽ). Cho biết bán kính Trái Đất là và . Hãy tính độ dài .

Huớng dẫn giải:

Xét vuông tại , ta có:

(định ly Pythagore)



Ta có:

**III. TÍNH CHÁT CỦA HAI TIÉP TUYÉN CÂT NHAU**

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thi:

**Kiến thức cần nhớ**

* Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
* Tia kẻ từ điềm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
* Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điềm.

Vi dụ 4: Hai tiếp tuyến tại và của cắt nhau ở .

a) Chứng minh: vuông góc với .

b) Biết . Tính .

**Huớng dẫn giải.**

a) Xét ( , ta có:

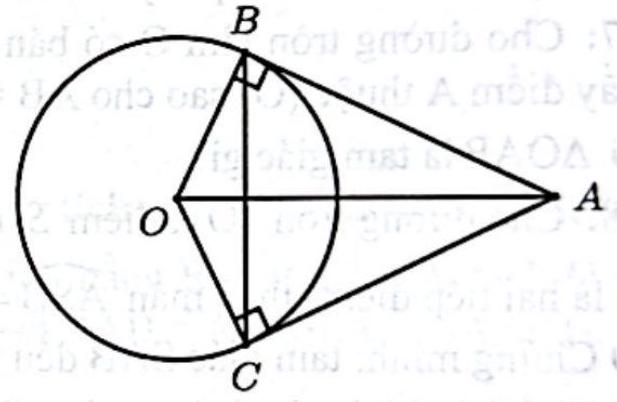
Hai tiếp tuyến và cắt nhau tại

Ta có:

là đường trung trực của đoạn

vuông góc với

b) Xét vuông tại , ta có:



Xét (O), ta có:

Hai tiếp tuyến và cắt nhau tại (gt)

là tia phân giác của

.

**BÀI TÂP CƠ BẢN**

Bài 1: Cho đường tròn và đường thẳng . Gọi là chân đường vuông góc vẽ từ xuống là độ dài của đoạn thẳng . Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

1. ;
2. ;
3. .

Bài 2: Điền vào chỗ .... trong bảng dưới đây bằng một độ dài hoặc một khẳng định thích hợp.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bán kính của | Khoàng cách từ  đến đường thằng | Vị trí tương đối của  và đường thẳng |
|  |  | .................. |
|  | ................. | và b tiếp xúc |
|  |  | ................... |

Bài 3: Cho đường tròn và điểm cách là . Hãy xác định vị trí tương đối của và đường thẳng đi qua vuông góc .

Bài 4: Cho đường tròn tâm bán kính và một điểm nằm trong . Vẽ đường thẳng bất kì đi qua . Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn ).

Bài 5: Cho đường tròn và điềm nằm ngoài đường tròn. Từ vẽ tiếp tuyến đến (với là tiếp điểm). Đoạn thẳng cắt tại . Biết và .

1. Tính bán kính của đường tròn ( ).
2. Tính chiều dài cạnh của tam giác .

Bài 6: Cho tam giác có . Vẽ đường tròn ( . Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 7: Cho đường tròn tâm có bán kính bằng và điểm cách một khoảng . Lấy điểm thuộc sao cho .

1. là tam giác gi?
2. Chứng minh: BA tiếp xúc với .

Bài 8: Cho đường tròn , điểm nằm ngoài sao cho và là hai tiếp tuyến , B là hai tiếp điểm) thoà mãn . Biết chu vi tam giác là .

1. Chứng minh: tam giác đều và tính độ dài dây .
2. Tính bán kính của đường tròn .

Bài 9: Từ điềm ngoài đường tròn tâm , vẽ tiếp tuyến với tiếp điềm . Lấy điểm thuộc (O) khác sao cho .

1. So sánh và .
2. Chứng minh: là tiếp tuyến của .

Bài 10: Lấy hai điểm và cùng thuộc đường tròn tâm không thẳng hàng). Tiếp tuyến của tại cắt tia phân giác của tại .

1. So sánh và .
2. Chứng minh: đường thẳng là tiếp tuyến của .

Bài 11: Từ điểm ngoài đường tròn tâm , vẽ tiếp tuyến đến là tiếp điểm). Từ vẽ dây cung vuông góc với tại .

1. Chứng minh: là tia phân giác của .
2. So sánh và . Chứng minh: đường thẳng là tiếp tuyến của .

Bài 12: Trên tiếp tuyến tại của , lấy điểm sao cho . Lấy điểm khác và thuộc ( ) sao cho .

1. So sánh và .
2. Chứng minh: tứ giác là hình vuông và tiếp xúc với .

Bài 13: Cho đường tròn có đường kính . Vẽ dây sao cho . Gọi là trung điểm của dây . Đường thẳng cắt tiếp tuyến tại . Chứng minh:

1. Tam giác MAB vuông, từ đó suy ra độ dài của theo .
2. là tia phân giác của .
3. EM là tiếp tuyến của đường tròn .

Bài 14: Cho và một điểm nằm ngoài đường tròn . Từ vẽ hai tiếp tuyến của đường tròn là hai tiếp điểm). Gọi là giao điểm của và .

1. Chứng minh: tại .
2. Từ vẽ đường kính của , đường thẳng cắt tại (khác ). Chứng minh: .

Bài 15: Cho tam giác vuông tại . Vẽ đường tròn tâm , đường kính ; cắt đường tròn tại .

1. Gọi là trung điểm của . Chứng minh: vuông, từ đó suy ra .
2. Chứng minh: . Từ đó suy ra: là tiếp tuyến của đường tròn .

Bài 16: Trên tiếp tuyến tại của đường tròn bán kính bằng , lấy điểm sao cho . Lấy điểm khác và thuộc sao cho .

1. Tính .
2. Tính và chứng minh: tiếp xúc với .
3. Kéo dài cắt tia ờ . Dùng ti số lượng giác, hãy tính các cạnh của theo .

Bài 17: Trên tiếp tuyến tại của đường tròn bán kính bằng , lấy điểm cách một khoảng bằng . Lấy điểm khác và thuộc sao cho . cắt tại .

1. Tính và tính .
2. Tính theo và chứng minh: tiếp xúc với .
3. Đường thẳng là gì đối với đoạn thẳng ? Tại sao? Tính .

Bài 18: Hai tiếp tuyến tại và của đường tròn cắt nhau ở . Từ kẻ tia vuông góc với cắt tại . Chứng minh: và .

Bài 19: Cho đường tròn tâm bán kính bằng . Lấy điểm cách một khoảng bằng . Từ vẽ hai tiếp tuyến với hai tiếp điểm là và . Đoạn thẳng cắt tại . Đường thẳng qua và vuông góc với cắt tại . Chứng minh:

1. và cân ở .
2. Đường thẳng là tiếp tuyến của .

Bài 20: Hai tiếp tuyến tại và của đường tròn cắt nhau ở . Đường thẳng qua và vuông góc với cắt tia tại . Chứng minh:

1. cân.

Bài 21: Cho đường tròn tâm bán kính có đường kính . Từ điểm trên tiếp tuyến tại của , vẽ tiếp tuyến thứ hai là tiếp diểm). Gọi và là hình chiếu vuông góc của lên và tia . Chứng minh:

1. HK đi qua trung điềm I của AM.
2. Ba đường thẳng đồng quy.

Bài 22: Cho đường tròn , dây khác đường kính. ua kẻ đường vuông góc với , cắt tiếp tuyến tại của đường tròn ở điểm .

1. Chứng minh: là tiếp tuyến của .
2. Cho bán kính của đường tròn bằng . Tính độ dài .

Bài 23: Cho đường tròn có bán kính , dây vuông góc với tại trung điểm của .

1. Tứ giác là hình gì? Vì sao?
2. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại , nó cắt đường thẳng tại . Tính độ dài theo .

Bài 24: Cho đường tròn , điểm nằm ngoài . Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn là các tiếp điểm).

1. Chứng minh: .
2. Vẽ đường kính . Chứng minh: .
3. Tính độ dài các cạnh của biết .

Bài 25: Cho đường tròn , điểm nằm ngoài sao cho hai tiếp tuyến và ( là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại .

1. Chứng minh: tứ giác là hình vuông và tính độ dài của và .
2. Qua giao điểm của đoạn thẳng và đường tròn , vẽ một tiếp tuyến cắt lần lượt tại . Chứng minh: là trung điểm của đoạn .
3. Chứng minh: và tính độ dài của .

Bài 26: Cho đường tròn , điểm nằm ngoài . Kẻ tiếp tuyến với đường tròn là các tiếp điểm). Qua điểm thuộc cung nhỏ , kè tiếp tuyến với đường tròn, cắt và theo thứ tự ở và . Biết , tính chu vi .

Bài 27: Cho tam giác nhọn. Vẽ đường tròn tâm đường kính cắt lần lượt tại và . và cắt nhau tại . Gọi là giao điểm của và .

1. Chứng minh: tại .
2. Gọi là trung điểm . Chứng minh: cân và là tiếp tuyến của .

Bài 28: Cho đường tròn và điểm có . Kè các tiếp tuyến với đường tròn là các tiếp điểm . Gọi là giao điểm của và .

1. Tính độ dài .
2. Qua điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt và theo thứ tự tại và . Tính chu vi .

Bài 29: Cho đường tròn tâm có dây . Bán kính vuông góc với dây thuộc cung nhỏ . Tiếp tuyến của tại cắt tia ờ . Chứng minh: là tia phân giác .

Bài 30: Cho đường tròn , các tiếp tuyến và kẻ từ đến đường tròn vuông góc với nhau tại và là các tiếp điểm).

1. Tứ giác là hình gì? Vì sao?
2. Gọi là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ . Qua kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt và theo thứ tự tại và . Tính chu vi .
3. Tính số đo .

Bài 31: Cho tam giác vuông tại , đường cao . Vẽ đường tròn . Kè các tiếp tuyến với đường tròn là các tiếp điểm khác . Chứng minh rằng:

1. Ba điểm thẳng hàng.
2. tiếp xúc với đường tròn có đường kính .

Bài 32: Chứng minh rằng nếu tam giác có chu vi 2 p, bán kính đường tròn nội tiếp bằng thì diện tích cùa tam giác có công thức: p.r.

Bài 33: Cho tam giác vuông tại . Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với lần lượt tại .

1. Tứ giác là hình gì? Vì sao?
2. Tính bán kính của biết .

**BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

Bài 34: Cho đường kính . Gọi là điểm thuộc đường tròn sao cho .

1. Chứng minh: vuông.
2. Tiếp tuyến tại và của cắt nhau tại . Chứng minh: .

Bài 35: Cho đường tròn , dây cung không qua tâm. Vẽ các tiếp tuyến tại và của cắt nhau tại .

1. Chứng minh: .
2. Vẽ đường kính của . Chứng minh: .

Bài 36: Cho đường tròn và một điểm nằm ngoài đường tròn sao cho . Từ vẽ tiếp tuyến của đường tròn ( là tiếp điểm).

1. Chứng minh: vuông tại và tính độ dài theo .
2. Từ vẽ dây cung của vuông góc với cạnh tại . Chứng minh: là tiếp tuyến của đường tròn .

Bài 37: Cho là đường kính của bán kính . Cho dây . Tiếp tuyến của tại cắt tia ở . Tiếp tuyến của tại cắt ở .

1. Tính và dùng tỉ số lượng giác để tính theo .
2. Tính và tính AM theo R.

Bài 38: Cho đường tròn có đường kính , vẽ hai tiếp tuyến và By với đường tròn . Qua điểm trên đường tròn , vẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn tiếp tuyến này cắt lần lượt tại .

1. Tính số đo và chứng minh: .
2. Chứng minh: và .

Bài 39: Từ điểm ở ngoài đường tròn kẻ tiếp tuyến với đường tròn ( là tiếp điềm). Gọi là trung điểm của đoạn , kẻ tiếp tuyến với đường tròn là tiếp điểm). Vẽ đường kính của đường tròn . Chứng minh:

1. là tam giác vuông.
2. Chứng minh: 10 song song với .

Bài 40: Cho là đường kính của đường tròn tâm . Trên tiếp tuyến của (O) tại , lấy điểm . Vẽ dây cung song song với . Chứng minh:

1. .
2. Đường thẳng là tiếp tuyến của .

Bài 41: Từ điềm nằm bên ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến đến là tiếp điểm). cắt tại .

1. Chứng minh : Bốn điểm cùng thuộc một đường tròn và tại .
2. Kè đường kính của cắt tại khác . Chứng minh: và .
3. tại . Gọi lần lượt là giao điểm của với và với . Chứng minh : là đường phân giác trong của và .

Bài 42: Từ ngoài vẽ hai tiếp tuyến và với là tiếp điểm). Vẽ dây cùa sao cho song song với .

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: ba điềm thẳng hàng.
3. cắt tại cắt tại . Chứng minh: là tia phân giác của .

Bài 43: Cho đường kính . Lấy điềm trên ( khác và ). Trên đường thẳng, vuông góc với tại , lấy ngoài , MA cắt tại cắt tại .

1. Tính: .
2. cắt tại . Chứng minh: thẳng hàng.
3. Chứng minh: cùng nằm trên một đường tròn.
4. Gọi là trung điềm của . Chứng minh: là tiếp tuyến của .

Bài 44: Cho điềm nằm ngoài đường tròn . Từ kẻ tiếp tuyến đến đường tròn ( là tiếp điểm). Kẻ dây vuông góc tại .

1. Chứng minh: là tiếp tuyến tại của .
2. Từ vẽ đường thẳng song song với ; cắt tại khác ). Chứng minh: là đường kính của .
3. Gọi là giao điềm thứ hai của và . Chứng minh: .

Bài 45: Cho đường kính và một điểm nằm trên với ( khác và ). Tiếp tuyến tại của cắt tiếp tuyến tại và của theo thưu tự ở và .

1. Chứng minh: tứ giác là hình thang vuông.
2. cắt tại , cắt tại . Chứng minh: vuông góc với và DE.DA [DN.DO](http://DN.DO).
3. Đường thẳng vuông góc với tại cắt đường thẳng tại . Chứng minh: tứ giác OFDB là hình chữ nhật.
4. Cho . Tính theo diện tích tứ giác .

Bài 46: Cho và điểm A ngoài sao cho . Từ vẽ hai tiếp tuyến và đến với là hai tiếp điểm. Chứng minh:

1. là đường trung trực của đoạn .
2. đều. Tính theo .
3. Đường vuông góc với tại cắt tại E. Đường vuông góc với tại cắt tại . Chứng minh: tứ giác là hình thoi và là tiếp tuyến của .

Bài 47: Từ điểm ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến đến với là các tiếp điềm. Tia cắt dây tại .

1. Chứng minh: là trung trực của đoạn thẳng và .
2. Vẽ đường kính của . Gọi là trung điểm của . Chứng minh: là hình chữ nhật.

Bài 48: Cho tam giác vuông tại có và .

1. Giài tam giác .
2. Kè đường cao của tam giác . Chứng minh: là tiếp tuyến của .
3. Từ kẻ cắt tại và từ kẻ cắt tại . Chứng minh: là tiếp tuyến của .
4. Chứng minh: 3 điểm thẳng hàng.

Bài 49: Cho đường kính . Lấy điểm thuộc với không trùng và . Goi là trung điểm của đoạn thẳng . Vẽ tiếp tuyến tại của cắt tia tại .

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: DA là tiếp tuyến .
3. Vẽ và vẽ . Chứng minh: .

Bài 50: Từ điểm ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến đến là các tiếp điểm).

1. Chứng minh: vuông góc với tại .
2. Vẽ đường thẳng vuông góc với tại cắt cạnh tại . Chứng minh: là tam giác cân.
3. Trên tia đối của tia lấy điểm . Vẽ hai tiếp tuyến đến là tiếp điểm). Chứng minh: 3 điểm thẳng hàng.

Bài 51: Cho điểm nằm ngoài đường tròn . Vẽ 2 tiếp tuyến với đường tròn là các tiếp điểm). Vẽ đường kính của đường tròn .

1. Chứng minh: và .
2. Gọi là giao điểm của và đường tròn khác là giao điểm của và . Chứng minh: .
3. Chứng minh: .
4. Gọi là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác . Tính độ dài đoạn thẳng theo R, r.

Bài 52: Cho và là điềm nằm ngoài . Qua vẽ tiếp tuyến với là các tiếp điểm). cắt tại .

1. Chứng minh: là trung trực của đoạn .
2. Tính biết và .
3. Vẽ đường kính cắt tại . Gọi là trung điểm của . Đường thẳng cắt đường thẳng tại . Chứng minh: .
4. Chứng minh: là tiếp tuyến của .

Bài 53: Từ điềm ngoài , vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn là 2 tiếp điểm). vẽ đường thẳng vuông góc với ; qua vẽ đường thẳng này vuông góc với . Hai đường thẳng này cắt nhau tại .

1. Chứng minh: đi qua trung điểm của và 5 điểm cùng nằm trên một đường tròn.
2. Gọi lần lượt là trung điểm của và . Chứng minh: . (gơi ý: goi là trung điểm cúa )
3. cắt tại . Chứng minh: . (gơi ý: vẽ tại )

Bài 54: Cho nửa đường tròn đường kính . Gọi và By là các tia vuông góc với (Ax và By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ ). Qua điểm thuộc nửa đường tròn khác và ) kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt và theo thứ tự tại và . Chứng minh rằng:

1. .
2. Bốn điểm cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
3. Cho góc . Tính diện tích theo .

Bài 55: Cho đường tròn , đường kính . Lấy điểm thuộc đường tròn . Tiếp tuyến tại của đường tròn cắt tia tại .

1. Chứng minh: .
2. Tia cắt đường tròn lần lượt tại hai điểm và (điểm nằm giữa hai điểm và . Chứng minh: .
3. Vẽ dây vuông góc với tại . Chứng minh: là tiếp tuyến của đường tròn .

Bài 56: Cho đường tròn và dây không đi qua tâm . Gọi là trung điểm của .

1. Chứng minh: .
2. Tiếp tuyến tại của đường tròn cắt tia tại điểm . Vẽ đường kính cắt đường tròn tại . Chứng minh: .
3. Chứng minh: .
4. Tiếp tuyến tại của đường tròn cắt đường thẳng tại . cắt tại điểm . Chứng minh: .

Bài 57: Cho tam giác vuông tại . Đường tròn tâm đường kính cắt tại .

1. Chứng minh: .
2. Gọi là trung điểm của . Tiếp tuyến tại cắt ở và cắt tại . Chứng minh: là tiếp tuyến của .
3. cắt ở . Chứng minh: .
4. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: .

Bài 58: Cho đường tròn tâm có đường kính và có bán kính bằng . Tiếp tuyến của tại cắt đường thẳng ờ . Chứng minh:

1. .
2. .

Bài 59: Tiếp tuyến tại của ) cắt dây kéo dài tại ngoài . Vẽ vuông góc với tại .

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: .

Bài 60: Trên nửa đường tròn tâm đường kính , lấy điểm . Vẽ đường tròn tâm tiếp xúc với tại . Vẽ tiếp tuyến và của với và là hai tiếp điểm.

1. Tìm hai góc so le trong bằng nhau để chứng minh .
2. Chứng minh thẳng hàng và đường thẳng tiếp xúc với .
3. Giä sử . Tính theo .

Bài 61: Cho là đường kính của đường tròn tâm . Trên tiếp tuyến tại của , lấy điểm sao cho lớn hơn bán kính của . Tư I vẽ tiếp tuyến thứ hai với tiếp điểm .

1. Chứng minh: .
2. Đường thẳng vuông góc với tại cắt tia ở . Chứng minh: .
3. Tia cắt tia ở . Chứng minh: cân ở .

Bài 62: Cho đường tròn tâm có dây cung sao cho tù. Tiếp tuyến của tại và dây lần lượt cắt tia phân giác của ở và . Vẽ vuông góc với ở và cắt ở . Chứng minh:

1. H là trực tâm của .
2. .
3. Tứ giác AHBO là hình thoi.

Bài 63: Cho tam giác nhọn, đường tròn tâm có đường kính cắt lần lượt ở và . Gọi là giao điểm của và là giao điểm của và .

1. Tính số đo và .
2. Chứng minh: Bốn điểm cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm của đường tròn.
3. Gọi là trung điểm của . Chứng minh: .
4. Chứng minh: tiếp tuyến tại và của đường tròn cắt nhau tại .

Bài 64: Cho đường kính , trên tiếp tuyến tại của đường tròn lấy điểm sao cho . Từ vẽ tiếp tuyến của là tiếp điểm và khác ).

1. Tính độ dài theo và chứng minh: .
2. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: bốn điểm thuộc cùng một đường tròn và DC là tiếp tuyến của đường tròn tâm bán kính .