**ĐƯÒNG TRÒN**

**§1. ĐƯỜNG TRÒN**

**I. KHÁI NIỆM VÊ ĐƯÒ̀NG TRÒN**

Đường tròn tâm bán kính , kí hiệu , là hình gồm tất cả các điểm trong mặt phẳng cách một khoảng bằng .

* Khi không cần chú ý đến bán kính, đường tròn còn được kí hiệu là .
* Cho đường tròn và điểm đó:
* Nếu thì điềm nằm trên đường tròn hay thuộc đường tròn;
* Nếu thì điểm nằm trong đường tròn;
* Nếu thì điểm nằm ngoài đường tròn.

**II. TÍNH ĐOI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

Đường tròn là hình có tâm đối xứng; tâm đối xứng là tâm của đường tròn. Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mọi đường thằng đi qua tâm của đường tròn đều là trục đối xứng của nó.

**III. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN.**

Cho hai điểm cùng thuộc một đường tròn. Đoạn thẳng gọi là dây cung hoặc dây. Đường kính là một dây đi qua tâm.

Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây có độ dài lớn nhất.

Ví du 1: Cho đường tròn có là dây cung. tại . Chứng minh là trung điểm của .

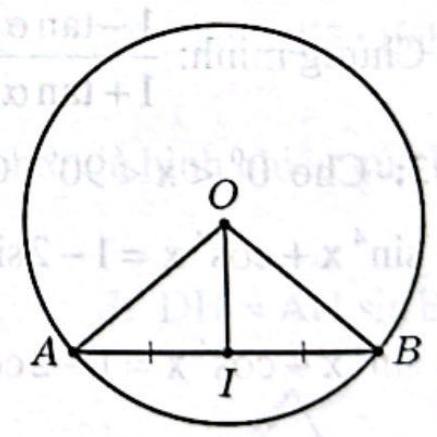
Huớng dẫn giải:

Xét , ta có:

(bán kính )

cân tại

Mà là đường cao tại



Nên là đường trung tuyến

là trung điểm của .

Ví dụ 2: Cho đường tròn có là dây cung. Gọi là trung điểm của . Chứng minh tại .

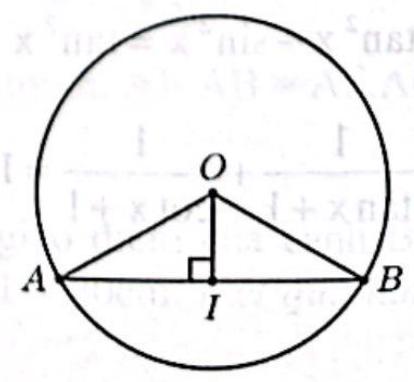
Huớng dẫn giải:

Xét , ta có: (bán kính )

cân tại

Mà là đường trung tuyến ( là trung điểm của )

Nên là đường cao tại .



Nhận xét: Trong 1 đường tròn

* Đường kính, bán kính, hay một phần bán kính vuông goc với dây thì đi qua trung điểm của dây cung đó.
* Và ngược lại đường kính, bán kính hay 1 phần bán kính đi qua trung điểm của dây không chứa tâm thì vuông góc với dây cung đó.

**VI. V! TRÍ TƯO'NG ĐOI CÙA HAI ĐƯỜNG TRÒN**

**Định nghĩa:**

* Hai đường tròn không có điểm chung gọi là hai đường tròn không giao nhau. Hai đường tròn không giao nhau có thể ở ngoài nhau hoặc đường tròn này đựng đường tròn kia.
* Hai đường tròn chỉ có một điểm chung gọi là hai đường tròn tiếp xúc nhau. Điểm chung đó gọi là tiếp điểm. Hai đường tròn tiếp xúc có thể tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong.
* Hai đường tròn có đúng hai điểm chung gọi là hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung gọi là hai giao điểm. Đoạn thẳng nối hai điểm chung được gọi là diây chung.

Ta có các kết quả sau:

**จ Kiến thức cần nhớ**

* Hai đường tròn ngoài nhau khi khoảng cách hai tâm lớn hơn tổng hiaì `án kính.
* Hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi khoảng cách hai tâm bằng tổng hai bán kính. Lúc đó tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.
* Hai đường tròn cắt nhau khi khoảng cách hai tâm nhỏ hơn tổi.g lớn hơn hiệu của hai bán kinh.
* Hai đường tròn tiếp xúc trong khi khoảng cách hai tâm bằnç hiệu hai bán kính. Iúc tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.
* Đường tròn này chứa đường tròn kia khi khoảıg các.. iai tâm nhủ iıon hiệu của hai tán kính.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Hình ảnh mô tả | | Vị trí tương đối của và |
| Hai dừng tròn ngoà nhau | |  |
| Hai dương tròn tiệp nác ngoài | | và ngoài nhau |
| Hai dưong tròn cát nhau |  |

Ví dụ 3: Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn và ') trong mỗi trường hợp sau:  
a) ;  
b) ;  
c) ;  
d)

**Huớng dẫn giaai:**

a) Ta có nên , suy ra hai đường tròn và ở ngoài nhau.

b) Ta có nên , suy ra hai đường tròn và tiếp xúc ngoài.

c) Ta có nên , suy ra hai đường tròn và cắt nhau.

d) Ta có nên , suy ra đường tròn đựng đường tròn ( .

Chú ý: Nếu thì trùng với . Hai đường tròn có tâm trùng nhau gọi là hail đường tròn đồng tâm.

**BÀI TÂP CƠ BẢN**

**BÀI TẬP ĐƯỜNG TRÒN**

Bài 1: Cho đường tròn , dây . Kẻ tại . Tính ?

Bài 2: Cho đường tròn là trung điểm của dây . Biết .

1. Chứng minh: tại .
2. Tính MN?

Bài 3: Cho đường tròn , dây . Hãy tính khoảng cách từ tâm đến dây . (Gợi ý: Kè tại ).

Bài 4: Cho đường tròn , vẽ dây . Kẻ tại .

1. Dùng tỉ số lượng giác hãy tính . Từ đó suy ra .
2. Tính OI theo R. (GV huoóng dẫn hoc sinh vẽ dây cung có độ dài ).

Bài 5: Cho đường tròn có bán kính . Dây của đường tròn vuông góc với tại trung điểm của . Tính độ dài .

Bài 6: Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh bằng là bao nhiêu?

Bài 7: Cho tứ giác có và . Gọi là trung điểm của .

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: , từ đó suy cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 8: Cho đường tròn , vẽ dây . Gọi là trung điểm của . Qua vẽ là đường kính của thuộc cung nhỏ . Tính dây của .

Bài 9: Cho hình chữ nhật có . Chứng minh: bốn điểm , thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 10: Cho tam giác nhọn có hai đường cao và . Gọi là trung điểm của .

1. Chứng minh: .
2. Bốn điểm có nằm trên một đường tròn không? Vì sao?

Bài 11: Cho tam giác nhọn có hai đường cao và . Gọi là trung điểm của .

1. Chứng minh: bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi là trung điểm của . Chứng minh: .

Bài 12: Cho tam giác , các đường cao và . Chứng minh:

1. Bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.
2. .

**Bై BÀl TÂP LUYỆN TÂP**

Bài 13: Cho đường tròn đường kính . Trên lấy điềm sao cho .

1. Hãy tính theo .
2. Tính số đo các góc của tam giác .

Bài 14: Cho tam giác đều có và lần lượt là trung điểm của cạnh và .

1. Chứng minh: và là hai đường cao của tam giác .
2. Gọi là trung điểm của . So sánh và .
3. Chứng minh: bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 15: Cho đường tròn tâm có hai dây cung và không cắt nhau. Gọi và lần lượt là khoảng cách từ đến dây và dây .

1. Chứng minh: lần lượt là trung điểm của và .
2. Già sử . Chứng minh: suy ra .

Bài 16: Cho đường tròn tâm có hai dây và bằng nhau và cắt nhau ở nằm bên trong . Gọi lẩn lượt là trung điểm của và .

1. Tam giác và tam giác là tam giác gi?
2. So sánh và .
3. Chứng minh:

Łài 17: Cho đường tròn tâm có hai dây cung và dài bằng nhau và không cắt nhau. Kè tại tại .

1. Chứng minh: .
2. So sánh và .

Bài 18: Cho đường tròn đường kính , dây không cắt đường kính . Gọi và theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ và đến . Chứng minh rằng . (Gợi ý: Kè OM vuông góc với ).

Bài i9: Cho đường tròn có đường kính . Vẽ dây không song song và không cắt . Vẽ lần lượt vuông góc với tại .

1. Tứ giác là hình gì? Vì sao?
2. Chứng minh: là trung điểm của .
3. So sánh và .

Bài 20: Cho đường tròn tâm có đường kính . Vẽ dây không song song và không cắt dây . Vẽ lần lượt vuông góc với tại . Chứng minh:  
7) I là trung điềm của .  
2)   
3) .

Bài 21: Cho đường tròn và điểm nằm bên trong .

1. Hãy nêu cách dựng dây nhận làm trung điểm.
2. Tính độ dài ờ câu 1 ) biết .

Bài 22: Cho đường tròn có đường kính . Vẽ cung tâm bán kính , cung này cắt đường tròn ở và .

1. Tứ giác là hình gì? Vì sao?
2. Tính số đo các góc . 3) Chứng minh: đều.

Bài 23: Cho đường tròn có đường kính . Lấy là trung điểm của . Kè dây tại .

1. Tam giác và tam giác là tam giác gì? Vì sao?
2. Tính .
3. Chứng minh: tam giác đều.

Bài 24: Cho đường tròn tâm có bán kính và dây . tại .

1. Tính HA, HB, OH.
2. Vẽ dây sao cho là trung điểm của . Tính .

Bài 25: Cho tam giác vuông tại , điểm thuộc cạnh , điểm thuộc cạnh . Gọi theo thứ tự là trung điểm của . Chứng minh: bốn điểm , thuộc cùng một đường tròn.

Bài 26: Cho nửa đường tròn tâm , đường kính và dây không cắt đường kính. Gọi và lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ và đến . Chứng minh: .

Bài 27: Cho nửa đường tròn tâm , đường kính , dây . Các đường vuông góc với tại và tương ứng cắt ở và . Chứng minh: .

Bài 28: Cho nửa đường tròn tâm , đường kính . Trên lấy các điểm sao cho . Qua và , kẻ các đường thẳng song song với nhau, chúng cắt nửa đường tròn lần lượt ở và . Chứng minh: và vuông góc với .

Bài 29: Cho đường tròn , có hai dây , bằng nhau và vuông góc với nhau tại , . Tính khoảng cách từ đến mỗi dây.

Bài 30: Cho đường tròn , dây và dây . Giao điểm của các đường thẳng nằm ngoài đường tròn. Đường tròn cắt và tại và . Chứng minh: .

Bài 31: Cho đường tròn và điểm nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây vuông góc với OI tại ngắn hơn mọi dây khác đi qua .

Bài 32: Cho đường tròn , hai dây bằng nhau và cắt nhau tại điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh:

1. IO là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây và .
2. Điểm chia thành các đoạn thẳng bằng nhau đôi một.

Bài 33: Cho đường tròn bán kính . Hai dây song song với nhau và có dộ dài theo thứ tự bằng . Tính khoảng cách giữa hai dây ấy.

Bài 34: Cho đường tròn , các bán kính và . Trên cung nhỏ lấy các điểm và sao cho . Gọi là giao điểm của các đường thẳng và . Chứng minh:

1. là tia phân giác của .
2. vuông góc với .

Bài 35: Cho đường tròn tâm bán kính , dây .

1. Tính khoảng cách từ tâm đến dây .
2. Gọi là điểm thuộc dây sao cho . Kẻ dây đi qua và vuông góc với . Chứng minh: .

Bài 36: Cho đường tròn có bán kính . Hai dấy và song song với nhau. và ở khác phía đối với điểm . là khoảng cách từ đền dây là khoảng cách từ đến dây .

1. Chứng minh: thẳng hàng.
2. Tính khoảng cách giữ hai dây và , biết .

Bài 37: Cho tam giác vuông tại có là đường cao.

1. Tính ? Biết .
2. Vẽ đường tròn tâm ; bán kính cắt đường thẳng tại và (E nằm giữa và . Đường thẳng cắt tại khác ); đường thẳng cắt tại khác ). Chứng minh:

Bài 38: Cho tam giác vuông tại có đường cao . Gọi là trung điểm của . Từ hạ vuông góc với và lần lượt tại và . Đường tròn tâm bán kính cắt đường tròn tâm đường kính tại cắt tại .

1. Chứng minh: 5 điềm thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh: .
3. Chứng minh: 4 điểm thẳng hàng.

**BÀI TẬP V! TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯờNG TRÒN**

Bài 39: Cho đường tròn bán kính và . Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn nếu khoảng cách giữa hai tâm bằng:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. .

Bài 40: Điền vào chỗ ...... trong bảng dưới đây bằng một độ dài hoặc một khẳng định thích hợp:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Bán kính cùa | Bán kính của | {f6381442c-ae2a-488e-ac82-3915782fbd29}  1 | Vị trí tương đối của và |
|  |  | ............ | và tiếp xúc ngoài |
|  |  | … | và tiếp xúc trong |
|  |  |  | ................................ |
|  |  |  | . . |

Bài 41: Cho điềm thuộc đoạn . Vẽ và ( .

1. Hãy cho biết vị trí tương đối giữa đường tròn và đường tròn .
2. Đường thẳng qua cắt và tại và . Định dạng và .
3. Chứng minh: và .

Bài 42: Cho đường tròn tâm bán kính và đường tròn tâm ' bán kính cắt nhau tại và . Đường thẳng ' cắt tại . Giả sử .

1. Chứng minh: ' là đường trung trực của đoạn và tính .
2. Tính ' trong hai truờng hợp: thuộc đoạn ' và nằm ngoài '.

Bài 43: Cho điểm thuộc . Gọi ' là tâm đường tròn đường kính .

1. Hãy cho biết vị trí tương đối của và .
2. Giả sử có dây cắt tại khác có gì đặc biệt. Chứng minh: và .
3. Chứng minh: là trung điểm của .

Bài 44: Cho ) và . Chứng minh: đường tròn và ngoài nhau.

Bài 45: Cho điểm thuộc đoạn '. Vẽ và 'A). Chứng minh: đường tròn và ( ) tiếp xúc ngoài.

Bài 46: Cho và , giả sử . Chứng minh: đường tròn và ( ') cắt nhau.

Bài 47: Cho điểm thuộc . Gọi ' là tâm đường tròn đường kính . Chứng minh: đường tròn và tiếp xúc trong.

Bài 48: Cho đoạn vẽ và . Chứng minh: đường tròn và ( ) đựng nhau.

Bài 49: Cho và . Vẽ bán kính của song song với bán kính của trên cùng nửa mặt phẳng bờ .

1. Hãy cho biết vị trí tương đối giữa đường tròn tâm và đường tròn tâm .
2. Gọi là tiếp điểm của hai đường tròn. Tính và cho biết tam giác là tam giác gì?
3. Chứng minh: và .
4. Chứng minh: tam giác vuông tại .
5. cắt tại . Tính tỉ số và tính . (áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Bài 50: Cho và cắt nhau tại và ở khác phía với '). Đường thẳng cắt tại . Giả sử .

1. Chứng minh: là đường trung trực của là trung điểm .
2. Tính .

Bài 51: Cho và cắt nhau tại và nằm cùng nửa mặt phẳng có bờ là ). Đường thẳng cắt tại . Giả sử .

1. Chứng minh: là đường trung trực của và là trung điểm .
2. Tính .

Bài 52: Cho và , giả ư .

1. Cho biết vị trí tương đối giữa hai đường tròn.
2. Gọi là giao điểm của hai đường tròn. Tam giác ' là tam giác gì? (Hurớng dẫn: Dùng định lý Pytagore đảo).
3. Gọi là giao điềm của và . Chứng minh: ' là đường trung trực của . Tính .

Bài 53: Cho và cắt nhau tại và . Kẻ đường kính của và đường kính của ( ).

1. Tam giác và tam giác là tam giác gì?
2. Chứng minh: thẳng hàng. 3) Chứng minh: '.

Bài 54: Cho và cắt nhau tại và . Gọi là trung điểm của '. Đường thẳng vuông góc với tại cắt tại và cắt tại .

1. Kè vuông góc với tại . Chứng minh: .IA.
2. Kẻ 'H vuông góc với tại . Chứng minh: .
3. Tứ giác OIHO' là hình gì? Chứng minh: A là trung điểm của .
4. Chứng minh: A là trung điểm của .

Bài 55: Cho và có cùng bán kính cắt nhau tại và sao cho và nằm ờ hai bên đường thẳng . Đường thẳng qua cắt tại và cắt tại sao cho nằm giữa và D.

1. Kẻ đường kính của và đường kính của . Tam giác và tam giác là tam giác gì? Chứng minh: thẳng hàng.
2. Chứng minh tam giác cân tại và là trung điểm của .
3. Tam giác và tam giác là tam giác gì? Chứng minh: tứ giác là hình thang.
4. tại . Chứng minh: là trung điểm của .
5. Chứng minh: .

Bài 56: Cho và cắt nhau tại và . Một cát tuyến quay quanh cắt tại và cắt (O') tại .

1. Kè vuông góc với tại 'H vuông góc với tại vuông góc với 'H tại . Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật. So sánh và . Suy ra .
2. Chứng minh: lần lượt là trung điểm của .
3. Chứng minh: .
4. Chứng minh: . Xác định vị trí của để cát tuyến dài nhất.

Bài 57: Cho điểm thuộc . Gọi ' là tâm đường tròn đường kính .

1. Hãy cho biết vị trí tương đối của và .
2. Dây của cắt tại . Tam giác có gì đặc biệt?
3. Chứng minh: và .
4. Chứng minh: là trung điểm của .

Bài 58: Cho là trung điểm của . và .

1. Hãy cho biết vị trí tương đối của và .
2. Một đường thẳng qua cắt tại và cắt tại . Chứng minh: tam giác cân tại và tam giác vuông tại .
3. Chứng minh: là trung điểm của .

Bài 59: Cho có đường kính , điểm thuộc sao cho . Kẻ vuông góc với tại . là điểm đối xứng của qua . Kẻ đường tròn tâm ' đường kính cắt AC tại .

1. Chứng mính: và tiếp xúc trong tại .
2. Định dạng tam giác ? Chứng minh: là hình thang.
3. Gọi là trung điểm và chứng minh: .
4. Chứng minh: tam giác O'HK cân tại .

Bài 60: Cho có đường kính và điểm nằm giữa và . Vẽ có đường kính .

1. Hãy cho biết vị trí tương đối của và ( .
2. Kẻ dây của vuông góc với tại với là trung điểm của . Chứng minh: là trung điểm của và tứ giác là hình thoi.
3. Gọi là giao điểm của và . Chứng minh: vuông tại và .
4. Chứng minh: thẳng hàng.