**§1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

**Bài tập mẫu:** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có $AH$ là đường cao. Chứng minh các hệ thức sau:

1. $AB^{2}=BH⋅BC, AC^{2}=CH. CB$;

2. $BC^{2}=AB^{2}+AC^{2}$;

3. $AH. BC=AB. AC$;

4. $AH^{2}=BH. HC$;

5. $\frac{1}{AH^{2}}=\frac{1}{AB^{2}}+\frac{1}{AC^{2}}$.

Hướng dẫn giải:

1. Chứng minh $AB^{2}=BH. BC, AC^{2}=CH. CB$.

Xét $△ABH$ và $△ABC$, ta có: $\left\{\begin{matrix}\hat{ABH}=\hat{ABC} ( góc chung)  \\\hat{AHB}=\hat{BAC}\left(=90^{∘}\right)\end{matrix}\right.$

$⇒△ABH∼△CBA (g-g) ⇒\frac{AB}{CB}=\frac{BH}{BA}$ (tỉ số đồng dạng)$ ⇒AB^{2}=BH. BC$.

Tương tự ta cũng có: $AC^{2}=CH. CB$.

2. Chứng minh $BC^{2}=AB^{2}+AC^{2}$.

Ta có: $\left\{\begin{matrix}AB^{2}=BH. BC  (chứng minh câu 1 )  \\AC^{2}=CH⋅CB  (chứng minh câu 1 )  \end{matrix}\right.$

$$⇒AB^{2}+AC^{2}=BH⋅BC+CH⋅CB⇒AB^{2}+AC^{2}=BC (BH+CH) ⇒AB^{2}+AC^{2}=BC^{2}$$

3. Chứng minh $AH⋅BC=AB⋅AC$.

Ta có: $△ABH∼△CBA$ (chứng minh câu 1)

$⇒\frac{AB}{BC}=\frac{AH}{CA}$ (tỉ số đồng dạng)$ ⇒AH⋅BC=AB⋅AC$

4. Chứng minh $AH^{2}=BH⋅HC$.

Xét $△ABH$ và $△CAH$, ta có: $\left\{\begin{matrix}\hat{AHB}=\hat{AHC}\left(=90^{∘}\right)\\\hat{BAH}=\hat{ACH}  (còng phụ \hat{ABH} )  \end{matrix}\right.$

$⇒△ABH∼ΔCAH (g-g) ⇒\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{CH}$ (tỉ số đồng dạng)$ ⇒AH^{2}=BH⋅HC$

5. Chứng minh $\frac{1}{AH^{2}}=\frac{1}{AB^{2}}+\frac{1}{AC^{2}}$.

Ta có: $\frac{1}{AB^{2}}+\frac{1}{AC^{2}}=\frac{AC^{2}+AB^{2}}{AB^{2}⋅AC^{2}}=\frac{BC^{2}}{ (AH⋅BC) ^{2}}=\frac{BC^{2}}{AH^{2}⋅BC^{2}}=\frac{1}{AH^{2}}⇒\frac{1}{AH^{2}}=\frac{1}{AB^{2}}+\frac{1}{AC^{2}}$

Nhận xét: Trong tam giác vuông có đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông, ta có:

1. Vuông bình $=$ chiếu $×$ huyền.

2. Huyền bình $=$ vuông bình + vuông bình.

3. Cao $×$ huyền $=$ vuông $×$ vuông.

4. Cao bình $=$ chiếu $×$ chiếu.

5. Nghịch cao bình $=$ nghịch vuông bình + nghịch vuông bình.

**BÀI TẬP COO BẢN**

**Bài 1.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Hãy tính lần lượt độ dài các đoạn। $BH, CH, AH, AC$ nếu biết:

1. $AB=6 cm; BC=10 cm$;

2. $AB=20 cm; BC=25 cm$;

3. $AB=12 cm; BC=13 cm$;

4. $AB=\sqrt{3} cm; BC=2 cm$;

5. $AB=5 cm; BC=1dm$;

6. $AB=2\sqrt{2} cm; BC=4 cm$.

**Bài 2.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Hãy tính lần lượt độ dài các đoạn $BC, AH, BH, CH$ nếu biết:

1. $AB=3 cm; AC=4 cm$;

2. $AB=12 cm; AC=9 cm$;

3. $AB=12 cm; AC=5 cm$;

4. $AB=\sqrt{2} cm; AC=\sqrt{2} cm$;

5. $AB=\sqrt{3} cm; AC=1 cm$;

6. $AB=3a; AC=4a (a>0)$.

**Bài 3.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Hãy tính lần lượt độ dài các đoạn $AH, BC, AB, AC$ nếu biết:

1. $BH=9 cm; CH=16 cm$;

2. $BH=\sqrt{2} cm; CH=\sqrt{2} cm$;

3. $BH=1 cm; CH=3 cm$;

4. $BH=25 cm; CH=144 cm$;

5. $BH=16a; CH=9a (a>0)$;

6. $BH=144a; CH=25a (a>0)$.

**Bài 4.** Cho tam giác DEF vuông tại $D$, có đường cao DI. Tính độ dài DI nếu biết:

1. $DE=15 cm; DF=20 cm$;

2. $DE=1 cm; DF=1 cm$;

3. $DE=7 cm; DF=24 cm$;

4. $DE=12 cm; EF=15 cm$;

5. $DF=\sqrt{3} cm; EF=2 cm$;

6. $EI=15 cm; EF=20 cm$.

**Bài 5.** Giả sử tam giác $ABC$ không có góc tù, $AH$ là đường cao. Chứng minh: tam giác $ABC$ là tam giác vuông nếu biết:

1. $AB=6 cm; AC=8 cm; BC=10 cm$;

2. $AB=15 cm; AC=20 cm; BC=25 cm$;

3. $AH=12 cm; BH=16 cm; CH=9 cm$; 4) $AH=30 cm; BH=36 cm; CH=25 cm$;

4. $AB=2 cm; BH=1 cm; BC=4 cm$;

5. $AC=24 cm; BH=1, 96 cm; BC=25 cm$.

**Bài 6.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Tính chu vi tam giác $ABC$ biết rằng:

$$AC=5 cm, HC=\frac{25}{13} cm$$

**Bài 7.** Cho tam giác MNP cân tại $M$, đường cao $MH (H\in NP)$. Từ $H$ kẻ $HE$ vuông góc với $MN (E\in MN)$. Biết $MN=25 cm, HP=15 cm$. Tính $MH, ME$.

**Bài 8.** Cho tam giác $ABC$ nhọn có đường cao $AH$. Gọi $M, N$ là hình chiếu của $H$ lên $AB$ và $AC$. Chứng minh: $AB⋅AM=AC. AN$.

**Bài 9.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Biết $AB=3 cm, AC=4 cm$. Tính độ dài đường cao $AH$ và diện tích tam giác $AMB$.

**Bài 10.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Từ trung điểm $D$ của $AC$ kẻ $DE$ vuông góc với $BC$ tại E. Chứng minh:

1. $BE^{2}-CE^{2}=BD^{2}-CD^{2}$.

2. $AB^{2}=BE^{2}-CE^{2}$.

**Bài 11.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Chứng minh:

$$BC^{2}=2AH^{2}+BH^{2}+CH^{2}$$

**Bài 12.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AC=16 cm, BC=20 cm$, vẽ đường cao $AK$. Gọi $E, F$ lần lượt là hình chiếu của $K$ lên $AB$ và $AC$.

1. Tính độ dài $BK, AK$.

2. Chứng minh: $AE⋅AB+AF⋅AC=2AK$.

**Bài 13.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có $AH$ là đường cao. Kè $HD$ vuông góc với $AB$ tại $D$ và $HE$ vuông góc với $AC$ tại $E$.

1. Chứng minh: $\frac{AB^{2}}{AC^{2}}=\frac{BH}{CH}$ sau đó suy ra $\frac{AB^{4}}{AC^{4}}=\frac{BH^{2}}{CH^{2}}$.

2. Chứng minh: $\frac{AB^{3}}{AC^{3}}=\frac{BD}{CE}$.

**Bài 14.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $M$ thuộc cạnh $BC$. Kẻ $ME, MF$ lần lượt vuông góc với $AB, AC$ tại $E$ và $F$. Chứng minh rằng:

1. $MB^{2}=2ME^{2}$ và $MC^{2}=2MF^{2}$.

2. $MB^{2}+MC^{2}=2MA^{2}$.

**Bài 15.** Cho hình vuông $ABCD$ và $M$ thuộc cạnh $BC$. Kéo dài $AM$ cắt tia $DC$ tại $N$. Qua $A$ kẻ đường thẳng vuông góc với $AM$ cắt tia $CB$ tại $E$. Chứng minh:

1. $AE=AN$.

2. $\frac{1}{AB^{2}}=\frac{1}{AM^{2}}+\frac{1}{AN^{2}}$.

**Bài 16.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có các đường cao $AH$ và $BK$. Qua $B$ kè đường thẳng vuông góc với $BC$ cắt tia đối của tia $AC$ tại $D$. Chứng minh:

1. $BD=2AH$.

2. $\frac{1}{BK^{2}}=\frac{1}{BC^{2}}+\frac{1}{4AH^{2}}$.

**Bài 17.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có cạnh $AB=6 cm$ và $AC=8 cm$. Các đường phân giác trong và ngoài của góc $B$ cắt đường thẳng $AC$ lần lượt tại $M$ và $N$.

1. Chứng minh: tam giác BMN vuông.

2. Tính độ dài các đoạn $AM, AN, BM, BN$.

**Bài 18.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Biết $BH=4 cm, CH=9 cm$. Gọi $D$ và $E$ lần lượt là hình chiếu của $H$ lên $AB$ và $AC$.

1. Tính độ dài đoạn thẳng $DE$.

2. Các đường thẳng vuông góc với $DE$ tại $D$ và tại $E$ lần lượt cắt $BC$ tại $M$ và $N$. Chứng minh: $M$ là trung điểm của $BH$ và $N$ là trung điểm của $CH$.

3. Tính diện tích tứ giác $DENM$.

**Bài 19.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có đường cao $AH$ bằng $12 cm$. Hãy tính cạnh huyền $BC$ nếu biết $HB: HC=1: 3$.

**Bài 20.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có đường cao $AH$. Biết $BC=125 cm$ và $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4}$. Tính $AB, AC, AH, BH, CH$.

**Bài 21.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A, AH$ là đường cao. Biết $\frac{AH}{AC}=\frac{3}{5}$ và $AB=15 cm$.

1. Tính HB, HC.

2. Gọi $E, F$ là hình chiếu của $H$ lên $AB, AC$. Chứng minh: $AH^{3}=BC. BE. CF$.

**Bài 22.** Cho một tam giác vuông có cạnh huyền là $5 cm$ và đường cao ứng với cạnh huyền là $2 cm$. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.