**Chương 2: PHƯONG BẤT DẲNG THÚ́C, BẤT PHUOONG TRRìNH BÂ̂C NHẠT MỘT ẨN**

**§1. BẤT ĐẮNG THỨC**

**I. KHÁI NIỆM BÁT ĐÅNG THỨC**

Cho hai số thực $x$ và $y$ được biểu diễn trên trục số (Hình 1).

Hãy cho biết số nào lớn hơn.



**Hinh 1**

Trên tập hợp số thực, khi so sánh hai số $a$ và $b$, xảy ra một trong ba trường hợp sau:

* Số a lớn hơn $b$, kí hiệu $a>b$.
* Số a nhỏ hơn $b$, kí hiệu $a<b$.
* Số $a$ bằng $b$, kí hiệu $a=b$.

Ta nói tập hợp số thực là tập hợp được sắp thứ tự.

Khi biều diễn số thực trên trục số (vẽ theo đường nằm ngang như Hình 2), điểm biểu diễn số nhỏ hơn nằm bên trái điềm biểu diễn số lớn hơn. Do đó, trục số được coi là hình ảnh của tập hợp số thực, cho phép chúng ta nhìn thấy được thứ tự của các số thực.



**Hinh 2**

Nếu $x>y$ hoặc $x=y$, ta viết $x\geq y$ (ta nói $x$ lớn hơn hoặc bằng $y$ hay $x$ không nhỏ hơn $y$ ). Nếu $x<y$ hoặc $x=y$, ta viết $x\leq y$ (ta nói $x$ nhỏ hơn hoặc bằng $y$ hay $x$ không lớn hơn $y$ ). Chẳng hạn: Để diễn tả

* Bình phương của số $a$ luôn lớn hơn hoặc bằng 0 , ta viết: $a^{2}\geq 0$.
* Số c không âm, ta viết: c $\geq 0$.
* Số $m$ không dương, ta viết: $m\leq 0$.

Ta có định nghĩa sau đây:

Hệ thức dạng $a>b$ (hay $a<b,a\geq b,a\leq b$ ) được gọi là bất đẳng thức và $a$ được gọi là vế trái, b được gọi là vế phải của bất đẳng thức.

**\* Luuи ý:**

* Bất đẳng thức $a>b$ còn được viết là $b<a$.
* Nếu đồng thời có hai bất đẳng thức $a>b$ và $a<c$ thì ta viết gộp lại thành $b<a<c$ (đọc là a lớn hơn b, nhỏ hơn $c$ ).
* Hai bất đẳng thức $a>b$ và $c>d$ (hay $a\geq b$ và $c\geq d$ ) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.
* Hai bất đẳng thức $a>b$ và $c<d$ (hay $a\geq b$ và $c\leq d$ ) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

Ví dụ 1: Hãy chỉ ra một bất đẳng thức diễn tả số $m$ nhỏ hơn 5 . Vế trái, vế phải của bất đẳng thức đó là gì?

**Htrớng dẫn giải:**

Đề diễn tả số $m$ nhỏ hơn 5 , ta có bất đă่ng thức $m<5$. Khi đó $m$ là vế trái, 5 là vế phải của bất đằng thức.

**BÀI TẬP COO BẢN**

Bài 1: Xác định vế trái và vế phải của các bất đẳng thức sau:

1. $-5>-9$;
2. $a^{2}+1\geq 2a$;
3. $(m+1)^{2}\geq 4m$.

**Bài 2:**

1. Cho hai ví dụ về bất đẳng thức.
2. Viết bất đẳng thức mô tả khẳng định "số $x$ không nhỏ hơn -100 ". Xác định vế trái và vế phải của bất đẳng thức đó.

Bài 3: Viết bất đẳng thức để mô tả mỗi tình huống sau:

1. Độ tuổi $x$ kết hôn hợp pháp theo quy định của pháp luật Việt Nam hiện nay là nam từ đủ 20 tuổi trở lên;
2. Độ tuồi $x$ kết hôn hợp pháp theo quy định của pháp luật Việt Nam hiện nay là nữ từ đủ 18 tuồi trờ lên;
3. Tuần tới, nhiệt độ $t\left( ^{∘}C\right)$ tại Los Angeles là dưới $20^{∘}C$;
4. Nhiệt độ $t\left( ^{∘}C\right)$ bảo quản của trứng gà là dưới $10^{∘}C$;
5. Để được điều khiển xe máy điện thì số tuổi $x$ của một người phải ít nhất là 16 tuổi;
6. Mức lương $p$ tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20000 đồng;
7. Số người $n$ mà xe buýt chở được tối đa 49 người.

Bài 4: Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

1. y lớn hơn 8 ;
2. $x$ không lớn hơn $y$;
3. $p$ không nhỏ hơn $q$;
4. $x$ nhỏ hơn hoặc bằng -9 ;
5. a là số âm;
6. b là số dương;
7. $t$ lớn hơn hoặc bằng 2025 ;
8. $m$ lớn hơn 10 ;
9. n nhỏ hơn 36 ;
10. $x$ nhỏ hơn hoặc bằng 3 ;
11. y lớn hơn hoặc bằng 0 ;
12. a không lớn hơn 13.

Bài 5: Biển báo giao thông R. 306 (Hình bên) báo tốc độ tối thiểu cho các xe cơ giới. Biển có hiệu lực bắt buộc các loại xe cơ giới vận hành với tốc độ không nhỏ hơn trị số ghi trên biển trong điều kiện giao thông thuận lợi và an toàn. Cho biết một ô tô đi trên đường đó với tốc độ $a(km/h)$. Hãy viết bất đẳng thức cho tình huống trên.



Bài 6: Dưới đây là hình ảnh của hai biển báo tốc độ giao thông (đơn vị: $km/h$ ) dành cho ô tô, máy kéo, mô tô.



Gọi v $(km/h)$ là tốc độ lưu thông của các phương tiện đó khi đi trên đoạn đường có một trong hai biển báo trên. Hãy dùng các bất đẳng thức để mô tả điều kiện của $v$ theo quy định thể hiện trên mỗi biển báo.

**TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC**

**1. Tính chất bắc cầu**

Cho $a,b,c$ là ba số thoả mãn $a>b$ và $b>c$. Trong hai số $a$ và $c$, số nào lớn hơn? Vì sao?



Cho ba số $a,b,c$. Nếu $a>b$ và $b>c$ thì $a>c$ (tính chất bắc cầu).

$⋆$ Chú ý: Tương tự, các thứ tự lớn hơn $(>)$, lớn hơn hoặc bằng $(\geq )$, nhỏ hơn hoặc bằng $(\leq )$ cũng có tính chất bắc cầu.

Ví du 2: So sánh hai số $a$ và $b$, biết $a<8$ và $b>8$.

**Huớng dẫn giaii:**

Do $a<8$ và $b>8$ nên theo tính chất bắc cầu ta suy ra $a<b$.

**BAÀ TÂP COơ BẢN**

Bài 7: So sánh hai số $m$ và $n$, biết $m\leq π$ và $n\geq π$.

Bài 8: Chứng minh:

1. $\frac{2025}{2024}>\frac{2024}{2025}$;
2. $\frac{2025}{1000}>1,999$;
3. $-\frac{2024}{2025}>-1,1$.

**2. Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng**

Em hãy viết kí hiệu thích hợp $(>,<)$ vào ô trống:

1. $8>5$
2. $-20<-4$
$$8+10◻5+10$$

$$-20+(-18)◻-4+(-18)$$

Từ bài trên, ta thấy khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức thì được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

$⋄$ **Kiến thức cần nhớ**

Hai bất đẳng thức $a>b$ và $m>n$ được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.

Hai bất đẳng thức $a>b$ và $m<n$ được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

Một cách tổng quát, ta có:

Cho ba số $a,b$ và $c$. Nếu $a>b$ thì $a+c>b+c$.

Chú $˙$ : Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có đấu $<,\geq ,\leq $.

Vi du 3: Chứng tò $2025+\left(-8^{90}\right)>2024+\left(-8^{90}\right)$.

**Huớng dẫn giải:**

Ta có $2025>2024$. Cộng hai vế của bất đẳng thức với $-8^{90}$, ta được:

$$2025+\left(-8^{90}\right)>2024+\left(-8^{90}\right)$$

Vi dụ 4: Cho hai số $x$ và $y$ thoà mãn $3x<2y$. Chứng tỏ $3x+99<2y+100$.

**Hrớng dẫn giải:**

Cộng 99 vào hai vế của bất đẳng thức $3x<2y$, ta được:

$$\begin{array}{c}3x+99<2y+99\#(1)\end{array}$$

Cộng $2y$ vào hai vế của bất đẳng thức $99<100$, ta được:

$$\begin{array}{c}99+2y<100+2y hay 2y+99<2y+100\#(2)\end{array}$$

Từ (1) và (2) suy ra $3x+99<2y+100$ (tính chất bắc cầu).

**BÀI TẬP COO BẢN**

Bài 9: Cho một ví dụ về hai bất đẳng thức cùng chiều và một ví dụ về hai bất đẳng thức ngược chiều.

Bài 10: Cho hai số $m$ và $n$ thoả mãn $m>n$. Chứng minh: $m+5>n+4$.

Bài 11: Cho $x^{2}\geq 1$. Chứng minh: $(x+1)^{2}\geq 2x+2$.

Bài 12: Cho $a^{2}\leq 3$. Chứng minh: $(a-1)^{2}\leq 4-2a$.

Bài 13: Cho $6 m\leq 7$. Chứng minh: $(m+3)^{2}\leq m^{2}+16$.

Bài 14: So sánh $a^{2}+4$ và 4 , với a là số thực tuỳ ý.

Bài 15: So sánh hai số $-7+99^{100}$ và $-17+99^{100}$.

Bài 16: Chứng minh: $\sqrt{29}-\sqrt{6}>\sqrt{28}-\sqrt{6}$.

Bài 17: Hãy cho biết các bất đẳng thức được tạo thành khi:

1. Cộng hai vế của bất đẳng thức $3a>7$ với -21 ;
2. Cộng hai vế của bất đẳng thức $m^{2}\leq n-3$ với 23 ;
3. Cộng vào hai vế của bất đẳng thức $5b\leq -7$ với -2 , rồi tiếp tục cộng với -9 .

Bài 18: Cho $a>b$ và $c>d$. Chứng minh: $a+c>b+d$.

Bài 19: Cho hai số $a$ và $b$ thoả mãn $4a<3b$. Chứng minh rằng $4a+120<3b+150$.

Bài 20: Gọi a là số tuổi của bạn An, b là số tuổi của bạn Bình, biết rằng bạn Bình lớn tuổi hơn bạn An. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau sáu năm nữa.

**3. Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân**

Em hãy viết kí hiệu thích hợp $(>,<)$ vào ô trống:

1. $5>4$
$5⋅13$ $◻$ $4⋅13$
2. $7>5$
$$7⋅(-3)◻5⋅(-3)$$
3. $-20<-4$

$$-20+(-18)◻-4+(-18)$$

1. $-9<-7$

$$-9⋅(-3)◻-7⋅(-3)$$

Từ bài trên, ta thấy:

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương thì được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm thì được một bất đẳng thức mới। ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Một cách tổng quát, ta có:

**- Kiến thức cần nhớ**

Cho ba số $a,b,c$ và $a>b$.

* Nếu c $>0$ thì a.c $>$ b.c;

Nếu $c<0$ thì a.c $<$ b.c.

Chú ýy: Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<,\geq ,\leq $.

Ví du 5: Không thực hiện phép tính, hãy so sánh: 1982.15 và 1983.15.

Huớng dẫn giải:

Ta có $1982<1983$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với 15 , ta được: $1982⋅15<1983⋅15$.

Ví du 6: Không thực hiện phép tính, hãy so sánh: $97⋅(-31)$ và $99⋅(-31)$.

**Huớng dẫn giải:**

Ta có $97<99$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với -31 , ta được: $97⋅(-31)>99⋅(-31)$.

**B̈ BÀI TÂP CƠ BÂN**

Bài 21: Hãy so sánh: $(-289)⋅(-85)^{12}$ và $(-290)⋅(-85)^{12}$.

Bài 22: Cho $a<b$. Chứng minh:

1. $4a+7<4b+7$
2. $6a-13<6b-13$;
3. $-3a+2024>-3b+2024$;
4. $-4a-11>-4b-11$;
5. $48a-23<48 b-23$;
6. $-2025a+1>-2025 b+1$.

Bài 23: Cho $a\geq b$. Hãy so sánh:

1. $13a+6$ và $13b+6$;
2. $21a-8$ và $21b-8$;
3. $20a-5$ và $20b-5$;
4. $-17a+6$ và $-17b+6$;
5. $\sqrt{7}-5a$ và $\sqrt{7}-5b$;
6. $-10a-3$ và $-10b-3$.

Bài 24: Không thực hiện phép tính, hãy chứng minh:

1. $3⋅(-9)+2025<3⋅(-5)+2025$;
2. $(-7)⋅(-8)+1982>(-7)⋅(-5)+1982$.

Bài 25: Chứng minh:

1. $6,81<3x+3,9<68,4$ với $21,4<x<21,5$;
2. $68,7\leq 5x+7,2\leq 74,2$ với $12,3\leq a\leq 13,4$.

Bài 26: Cho hai số $a,b$ thoà mãn $0<a^{2}<b^{2}$. Chứng minh: $\frac{3}{2}a^{2}<2 b^{2}$.

Bài 27: Cho hai số $a,b$ thoả mãn $a^{2}>b^{2}>0$. Chứng minh: $5a^{2}>4 b^{2}$.

Bài 28: Cho biết $-91 m\leq -91n$, hãy so sánh $m$ và $n$.

Bài 29: Hãy cho biết các bất đẳng thức được tạo thành khi:

1. Nhân hai vế của bất đẳng thức $x<4$ với 7 , rồi tiếp tục cộng với 5 ;
2. Nhân hai vế của bất đẳng thức $x\geq 3$ với 6 , rồi tiếp tục cộng với 9 ;
3. Nhân hai vế của bất đẳng thức $a^{2}-2>3 m$ với 5 , rồi tiếp tục cộng với -20 .

Bài 30: So sánh hai số $x$ và $y$ trong mỗi trường hợp sau:

1. $x+9>y+9$;
2. $-19x\leq -19y$;
3. $5x-7<5y-7$;
4. $-8x+3>-8y+3$.

Bài 31: Cho $-3a\geq -3 b$. Hãy so sánh:

1. a và b;
2. $5a-2$ và $5b-2$;
3. $1-6a$ và $1-6 b$.

Bài 32: Không thực hiện phép tính, hãy so sánh các biểu thức:

1. $-3,47⋅84,5$ và $-3,74⋅84,5$;
2. $15,34^{3}⋅π$ và $15,34^{3}⋅3$;
3. $\frac{152}{1891}$ và $\frac{125}{1891}$.

Bài 33: Cho $a,b,x,y$ là các số thực dương thoà mãn $a>b$ và $x>y$. Chứng minh: $ax>by$.

Bài 34: Cho $m\geq 2$. Chứng minh:

1. $m^{2}\geq 2 m$;
2. $(m+1)^{2}\geq 4m+1$.

Bài 35: Cho $x\geq 5$. Chứng minh:

1. $x^{2}\geq 5x$;
2. $(x+2)^{2}\geq 9x+4$.

Bài 36: Không thực hiện phép tính, hãy sắp các số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$7\sqrt{3},7\sqrt{2},7\sqrt{5},14$$

Bài 37: Một ca nô đi xuôi dòng trong 1 giờ 30 phút. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không quá $35 km/h$ và tốc độ của dòng nước là $5 km/h$. Chứng minh quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên không vượt quá $60 km$.

Bài 38: Một ca nô đi ngược dòng trong 2 giờ. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng lớn hơn $15 km/h$ và tốc độ của dòng nước là $3 km/h$. Chứng minh quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên lớn hơn $24 km$.

Bài 39: Bác Khang muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều rộng là $x$ $(m)$. Chiều dài dài hơn chiều rộng $5 m$. Bác Khang ước lượng là $x<20$. Bác có tấm lưới dài khoảng $95 m$. Tấm lưới này có đủ dài để bác Khang rào vườn không? Giải thích vì sao.

Bài 40: Bác Hải muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều dài là $x(m)$. Chiều rộng ngắn hơn chiều dài $3 m$. Bác Hải ước lượng là $x<30$. Bác có tấm lưới dài khoảng $135 m$. Tấm lưới này có đủ đài để bác Hải rào vườn không? Giải thích vì sao.

Bài 41: Bác Tuấn muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều rộng là $x$ $(m)$. Chiều dài dài hơn chiều rộng $10 m$. Bác Tuấn ước lượng là $x>15$. Bác có tấm lưới dài khoảng $85 m$. Tấm lưới này có đủ đài để bác Tuấn rào vườn không? Giải thích vì sao.

Bài 42: Bác Bình muốn rào xung quanh mành vườn hình chữ nhật có số đo chiều dài là $x$ $(m)$. Chiều rộng ngắn hơn chiều dài $15 m$. Bác Bình ước lượng là $x>40$. Bác có tấm lưới dài khoàng $120 m$. Tấm lưới này có đủ dài để bác Bình rào vườn không? Giải thích vì sao.

Bài 43: Hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Biết rằng chiều rộng của hình chữ nhật lónn hơn $12 cm$. Bạn Vy kết luận là chu vi của hình chữ nhật lớn hơn $96 cm$. Phát biểu của bạn Vy có đúng không? Vì sao?

Bài 44: Hình chữ nhật $MNPQ$ có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết rằng chiều rộng của hình chữ nhật nhỏ hơn $12 cm$. Bạn Giang kết luận là chu vi của hình chữ nhật lớn hơn $150 cm$. Phát biểu của bạn Giang có đúng không? Vì sao?