

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ($x > 0; x \neq 4$)

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$

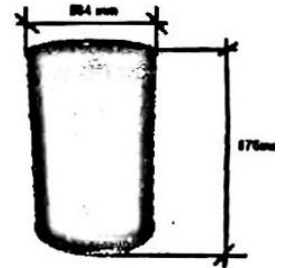
2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$.

3) Biết $P = A.B$. Tìm các giá trị của m để có x thỏa mãn $P = m$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Theo kế hoạch, một tổ công nhân mỗi ngày phải làm số sản phẩm trong thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày họ làm thêm 5 sản phẩm so với dự định thì sẽ hoàn thành công việc trước thời hạn 4 ngày. Nếu mỗi ngày họ làm ít hơn 5 sản phẩm thì họ chậm hơn thời hạn 5 ngày. Tính thời gian và số sản phẩm phải làm theo kế hoạch của tổ.

2) Thùng phi hay thùng phuy là vật dụng có dạng hình trụ, dùng để chứa và chuyên chở chất lỏng với dung tích lớn, sử dụng rộng rãi trong các hoạt động mua bán. Kích thước thùng phi được quy định theo tiêu chuẩn quốc tế với chiều cao 876mm, đường kính đáy là 584mm. Tính thể tích của một thùng phi (lấy $\pi \approx 3,14$, bỏ qua bề dày của vật liệu làm thùng phi).



Câu 3. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+3} - \sqrt{y-2} = 11 \\ 5\sqrt{x+3} + 2\sqrt{y-2} = 22 \end{cases}$$

2) Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$ (*)

a) Giải phương trình với $m = -3$.

b) Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình (*) có hai nghiệm là các số nguyên.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn đó tại A (Tia Ax thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn). Từ điểm M bất kỳ trên tia Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E ; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B)

1) Chứng minh tứ giác $AMCO$ là tứ giác nội tiếp

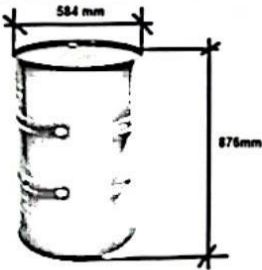
2) Chứng minh $AC^2 = 4ME \cdot EO$ và $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$

3) Vẽ CH vuông góc với AB (H thuộc AB). Gọi I là giao điểm của CH và MB . Tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) cắt tia MC tại điểm G . Chứng minh ba điểm A, I, G thẳng hàng.

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho $a, b \geq 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + \frac{16}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$.

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
Câu 1		Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad (x > 0; x \neq 4)$ a) Tính A khi $x = 16$. b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$. c) Biết $P = A.B$. Tìm các giá trị của m để có x thỏa mãn $P = m$.	2,0
	1)	Thay $x = 16$ (tm) vào A ta có $A = \frac{\sqrt{16+1}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$. Vậy khi $x = 16$ thì A có giá trị $\frac{5}{4}$.	0,5
	2)	Với $x > 0; x \neq 4$ $B = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-1}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-2)} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ $= \frac{x-1-\sqrt{x}-1+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+1})} = \frac{x+\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+1})}$ $= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$	0,25 0,25 0,25
	3)	$P = A.B = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$ Ta có $P = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}} = m \quad (1)$. Điều kiện $m > 0$ vì $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$. $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = m\sqrt{x} \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x} = 3 \quad (2)$ TH1: $m = 1$ Khi đó $(2) \Leftrightarrow 0.\sqrt{x} = 3$ (vô nghiệm) TH2: $m \neq 1, m > 0$ Khi đó $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{m-1}$	0,25

		<p>Mà $x > 0, x \neq 4$ nên $\begin{cases} \frac{3}{m-1} > 0 \\ \frac{3}{m-1} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$.</p> <p>Kết hợp điều kiện $m \neq 1, m > 0$ ta có $m > 1, m \neq \frac{5}{2}$.</p> <p>Vậy để phương trình $P = m$ có nghiệm thì $m > 1, m \neq \frac{5}{2}$.</p>	0,25
Câu	1)	<p>Theo kế hoạch, một tổ công nhân mỗi ngày phải làm số sản phẩm trong thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày họ làm thêm 5 sản phẩm so với dự định thì sẽ hoàn thành công việc trước thời hạn 4 ngày. Nếu mỗi ngày họ làm ít hơn 5 sản phẩm thì họ chậm hơn thời hạn 5 ngày. Tính thời gian và số sản phẩm phải làm theo kế hoạch của tổ.</p>	1,5
		<p>Gọi thời gian theo kế hoạch mà tổ dự định hoàn thành công việc là x (ngày, $x > 4$).</p> <p>Năng suất theo kế hoạch mà tổ dự định làm là: y (sản phẩm/ngày, $y > 5$).</p> <p>Số sản phẩm tổ dự định hoàn thành là: xy (sản phẩm).</p> <p>Nếu mỗi ngày họ làm thêm 5 sản phẩm so với dự định thì sẽ hoàn thành công việc trước thời hạn 4 ngày, ta có phương trình:</p> $(x - 4)(y + 5) = xy \quad (1)$	0,25 0,25 0,25
		<p>Nếu mỗi ngày họ làm ít hơn 5 sản phẩm thì họ chậm hơn thời hạn 5 ngày, ta có phương trình:</p> $(x + 5)(y - 5) = xy \quad (2)$	0,25
		<p>Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x - 4)(y + 5) = xy \\ (x + 5)(y - 5) = xy \end{cases}$</p> <p>Giải hệ phương trình thu được: $x = 40; y = 45$ (thỏa mãn điều kiện).</p> <p>Vậy: Thời gian tổ dự định hoàn thành công việc là 40 ngày.</p> <p>Số sản phẩm tổ phải làm theo kế hoạch là: $40 \cdot 45 = 1800$ (sản phẩm).</p>	0,25 0,25
		<p>2)</p> 	<p>Thùng phi hay thùng phuy là vật dụng có dạng hình trụ, dùng để chứa và chuyên chở chất lỏng với dung tích lớn, sử dụng rộng rãi trong các hoạt động mua bán. Kích thước thùng phi được quy định theo tiêu chuẩn quốc tế với chiều cao 876mm, đường kính đáy là 584mm. Tính thể tích của một thùng phi (lấy $\pi \approx 3,14$, bỏ qua bề dày của vật liệu làm thùng phi).</p>
		<p>Bán kính của đáy thùng phi là: $584 : 2 = 292$ (mm)</p>	0,25

		<p>Thể tích của thùng phi là:</p> $V = \pi R^2 h \approx 3,14.292^2.876 = 234530569 \text{ (mm}^3\text{)}$ <p>Vậy thể tích của thùng phi khoảng 234530569 (mm³) (hoặc 234530,569 (cm³))</p>	0,25
Câu 3	3.1	<p>Giải hệ phương trình sau</p> $\begin{cases} 3\sqrt{x+3} - \sqrt{y-2} = 11 \\ 5\sqrt{x+3} + 2\sqrt{y-2} = 22 \end{cases}$	1,0
		<p>Điều kiện xác định: $y \geq 2; x \geq -3$.</p> <p>Đặt $\sqrt{x+3} = a; \sqrt{y-2} = b$. Điều kiện $a \geq 0; b \geq 0$</p> <p>Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 3a - b = 11 \\ 5a + 2b = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b = 22 \\ 5a + 2b = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11a = 44 \\ 3a - b = 11 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)</p>	0,25
		<p>Theo cách đặt ta có: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 4 \\ \sqrt{y-2} = 1 \end{cases}$</p>	0,25
		<p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 16 \\ y-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 3 \end{cases}$ (TMĐK)</p>	0,25
		<p>Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (13; 3)$.</p>	0,25
	3.2	<p>2) Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$ (*)</p> <p>a) Giải phương trình với $m = -3$</p> <p>b) Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình (*) có hai nghiệm là các số nguyên.</p>	1,5
	a)	<p>Với $m = -3$ ta có phương trình</p> $x^2 + 2x + 1 = 0$ $\Delta' = 1^2 - 1.1 = 0$ <p>\Rightarrow Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -1$</p>	0,25
	b)	<p>Để phương trình có hai nghiệm</p> $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ $\Leftrightarrow [-(m+1)]^2 - 4(m+4) \geq 0$ $\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 \geq 0$ $\Leftrightarrow (m-5)(m+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-5 \geq 0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -3 \end{cases} (**)$	0,25
		<p>$\Leftrightarrow (m-5)(m+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-5 \leq 0 \\ m+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -3 \end{cases} (**)$</p>	0,25

	<p>Ta có: $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = x + \frac{4}{x-1}$</p> <p>Vì $x, m \in \mathbb{Z}$ nên $(x-1) \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$x-1$</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>-2</td> <td>2</td> <td>-4</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>-1</td> <td>3</td> <td>-3</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>-4</td> <td>6</td> <td>-3</td> <td>5</td> <td>-4</td> <td>6</td> </tr> </table> <p>Kết hợp điều kiện (**), ta tìm được $m \in \{-4; -3; 5; 6\}$</p>	$x-1$	-1	1	-2	2	-4	4	x	0	2	-1	3	-3	5	m	-4	6	-3	5	-4	6	0,25
$x-1$	-1	1	-2	2	-4	4																	
x	0	2	-1	3	-3	5																	
m	-4	6	-3	5	-4	6																	
Câu 4		0,25																					
1)	<p>Ta có: MA, MC là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MA \perp OA; MC \perp OC$ (t/c)</p> <p>Tứ giác AMCO có: $\widehat{MAO} = 90^\circ$ (MA \perp OA) $\widehat{MCO} = 90^\circ$ (MC \perp OC) $\Rightarrow \widehat{MCO} + \widehat{MAO} = 180^\circ$ \widehat{MCO} và \widehat{MAO} là 2 góc đối nhau \Rightarrow Tứ giác AMCO nội tiếp (DHNB tứ giác nội tiếp)</p>	0,25																					
2)	<p>Ta có: MA = MC (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau) OA = OC = R \Rightarrow OM là trung trực của AC (T/c đường trung trực của đoạn thẳng) \Rightarrow OM \perp AC tại E và E là trung điểm của AC ΔMAO vuông tại A; AE \perp MO $\Rightarrow AE^2 = ME \cdot EO$ (hệ thức lượng) $\Rightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = ME \cdot EO \Rightarrow AC^2 = 4ME \cdot EO$ (đpcm)</p>	0,25																					
	<p>Gọi F là giao điểm của MB và AC; $\widehat{ADF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Xét ΔMEF và ΔADF có: $\widehat{ADF} = \widehat{MEF} = 90^\circ$; \widehat{MFA} chung $\Rightarrow \Delta MEF \sim \Delta ADF$ (g-g) $\Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{DAF}$ \Rightarrow Tứ giác MAED nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh dưới góc α)</p>	0,25																					
		0,25																					

	$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AME}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE) Lại có tứ giác AMCO nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ACO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AO) Do đó: $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$ (đpcm)	0,25
3)	Ta có: CH // AM // GB (cùng vuông góc với AB) GB = GC; AM = MC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Áp dụng định lý Talet và hệ quả: ΔMGB có CI // GB $\Rightarrow \frac{CI}{GB} = \frac{MC}{MG} \Rightarrow \frac{CI}{BG} = \frac{MA}{MG}$ (1) ΔABM có IH // MA $\Rightarrow \frac{IH}{MA} = \frac{BI}{BM}$ (2) ΔMGB có CI // GB $\Rightarrow \frac{BI}{BM} = \frac{CG}{GM}$ (3) Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{IH}{MA} = \frac{CG}{GM} \Rightarrow \frac{IH}{CG} = \frac{MA}{MG}$ (4) Từ (1) và (4) $\Rightarrow \frac{CI}{BG} = \frac{IH}{CG} \Rightarrow CI = IH$ (vì $CG = BG$) $\Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn thẳng CH Gọi giao điểm của AG và CH là I'. ΔAGB có I'H // GB $\Rightarrow \frac{I'H}{GB} = \frac{AH}{AB}$ (5) ΔAMG có I'C // MA $\Rightarrow \frac{I'C}{MA} = \frac{GC}{GM} \Rightarrow \frac{I'C}{GC} = \frac{MA}{GM} = \frac{MC}{GM}$ (6) Lại có: $\frac{MC}{GM} = \frac{AI'}{AG} = \frac{AH}{AB}$ (7) Từ (5), (6), (7) $\Rightarrow \frac{I'H}{GB} = \frac{I'C}{GC} \Rightarrow I'H = I'C$ (vì $GB = GC$) $\Rightarrow I'$ là trung điểm của đoạn thẳng AH $\Rightarrow I' \equiv I$ Vậy A, I, G thẳng hàng.	0,25
Câu 5	Ta có: $2\sqrt{(a+1)(b+1)} \leq a+b+2$ Lại có $a^2+1 \geq 2a, b^2+1 \geq 2b \Rightarrow a+b \leq \frac{a^2+b^2+2}{2}$	0,25
	Do đó $P \geq a^2+b^2 + \frac{32}{a+b+2} \geq a^2+b^2 + \frac{64}{a^2+b^2+6}$ $\Rightarrow P \geq 10$ Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 1$ Vậy GTNN của P = 10 khi $a = b = 1$	0,25

(HS giải theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa)