

Môn thi : **TOÁN**

Ngày thi : 6 tháng 05 năm 2024

Thời gian làm bài : 90 phút

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{4}{9 - x} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3}$.

3) Tìm số tự nhiên x lớn hơn 8 để biểu thức $P = A : B$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài II (2,0 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 16 ngày làm xong. Nếu hai đội làm riêng thì đội thứ hai cần thời gian nhiều hơn đội thứ nhất 24 ngày mới làm xong công việc đó. Hỏi nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?

2) Một quả bóng hình cầu có bán kính là 3 cm. Tính diện tích da phải dùng để khâu được thành quả bóng đó? (không tính đến lượng da hao hụt, lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài III (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-3}} + 2|y+1| = 5 \\ \frac{2}{\sqrt{x-3}} - 3|y+1| = -4 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = 3x + m - 2$ và parabol $(P) : y = x^2$.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

b) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A, B . Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1| = 2|x_2|$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm C . Vẽ cát tuyến CDE của đường tròn (O) (tia CD nằm giữa 2 tia CA, CO và điểm D nằm giữa hai điểm C và E). Gọi M là giao điểm của CO và BD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên CO .

1) Chứng minh tứ giác $ADMH$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $CD.CE = CH.CO$.

3) Gọi F là giao điểm của AM và đường tròn (O) (F khác A). Chứng minh $\widehat{EHD} = 2\widehat{EBD}$ và ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm)

Giải phương trình $5x + 45 + 4\sqrt{5-x} = 8\sqrt{x-1} + 18\sqrt{x+4}$.

..... Hết

HƯỚNG DẪN CHUNG

- +) Điểm toàn bài để lẻ đến 0,25.
- +) Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tương ứng với biểu điểm của hướng dẫn chấm.
- +) Các tình huống phát sinh trong quá trình chấm do Hội đồng chấm thi quy định, thống nhất bằng biên bản.
- +) Bài hình vẽ hình sai thì không cho điểm

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{4}{9-x} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.	0,5
		1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.	
		Thay $x = 16$ (tmđk) vào A ta có:	0,25
		$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{4-2}{4+3} = \frac{2}{7}$.	0,25
	2)	Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$.	1,0
		$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{4}{9-x} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-3}$	0,25
		$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{4}{x-9} \right) \cdot (\sqrt{x}-3)$	
		$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{4}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot (\sqrt{x}-3)$	0,25
		$= \left(\frac{\sqrt{x}-3+4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) \cdot (\sqrt{x}-3)$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$ (đpcm).	0,25
	3)	Tìm số tự nhiên x lớn hơn 8 để biểu thức $P = A : B$ đạt giá trị nhỏ nhất.	0,5
	Ta có $P = A : B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$	0,25	
	Với x là số tự nhiên lớn hơn 8 mà $x \geq 0, x \neq 9$ nên $x \geq 10$. Khi đó:		
	$\sqrt{x}+1 \geq \sqrt{10}+1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{\sqrt{10}+1} \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 1 - \frac{3}{\sqrt{10}+1} = \frac{4-\sqrt{10}}{3}$	0,25	
	$\Rightarrow P \geq \frac{4-\sqrt{10}}{3}$		

		Vậy $\min P = \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \Leftrightarrow x = 10.$	
Bài II 2,0 điểm	1)	Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 16 ngày làm xong. Nếu hai đội làm riêng thì đội thứ hai cần nhiều hơn đội thứ nhất 24 ngày mới làm xong công việc đó. Hỏi nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?	1,5
		+) Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng xong công việc đó là x (ngày) ($x > 16$) Thời gian đội thứ hai làm riêng xong công việc đó là $x + 24$ (ngày).	0,25
		+) Trong một ngày, đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc). Trong một ngày, đội thứ hai làm được $\frac{1}{x + 24}$ (công việc)	0,25
		+) Vì cả hai đội làm chung thì sau 16 ngày xong công việc nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 24} = \frac{1}{16}$	0,25
		+) Giải phương trình ta được $x = 24$ (TMĐK).	0,5
		Vậy đội thứ nhất làm riêng thì trong 24 ngày xong công việc. Đội thứ hai làm riêng thì trong 48 ngày xong công việc.	0,25
	2)	Một quả bóng hình cầu có bán kính là 3 cm. Tính diện tích da phải dùng để khâu được thành quả bóng đó? (không tính đến tỉ lệ hao hụt, lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).	0,5
	Ta có diện tích da phải dùng để khâu được thành quả bóng khi không tính đến tỉ lệ hao hụt chính là diện tích mặt cầu với bán kính 3cm : $S = 4\pi R^2$	0,25	
	$S = 4\pi 3^2 = 36\pi \approx 113(\text{cm}^2)$ Vậy diện tích da cần dùng khoảng 113 cm ² .	0,25	
Bài III 2,5 điểm	1)	Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-3}} + 2 y+1 = 5 \\ \frac{2}{\sqrt{x-3}} - 3 y+1 = -4 \end{cases}$	1,0
		ĐKXD: $x > 3$	0,25
		Đặt $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = a; y+1 = b$	0,25
		Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 2a - 3b = -4 \end{cases}$ Giải ra được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$	0,25
	Trả lại biến ta có:	0,25	

	$+) \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 1 \Leftrightarrow x = 4 (tm)$ $+) y+1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(4; 1); (4; -3)\}$.</p>	0,25
2a)	<p>Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 3x + m - 2$ và parabol $(P): y = x^2$.</p> <p>a) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.</p>	0,75
	<p>Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):</p> $x^2 = 3x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - m + 2 = 0 \quad (1)$	0,25
	$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-m + 2) = 1 + 4m$	0,25
	<p>Ta có (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B \Leftrightarrow Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$.</p>	0,25
	<p>b) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A, B. Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1 = 2 x_2$</p>	0,75
	<p>$+) x_1, x_2$ là hoành độ giao điểm A, B suy ra x_1, x_2 là hai nghiệm của (1)</p> <p>Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -m + 2 \end{cases}$</p>	0,25
	<p>TH1: $x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1 \Rightarrow -m + 2 = 2 \Rightarrow m = 0$ (thỏa mãn)</p>	0,25
	<p>TH2: $x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -3 \Rightarrow -m + 2 = -18 \Rightarrow m = 20$ (thỏa mãn)</p> <p>Vậy $m \in \{0; 20\}$.</p>	0,25

Bài IV 3,0 điểm	1)	Chứng minh: Tứ giác $ADMH$ nội tiếp.	1,0
			0,25
		Có $AH \perp CO$ tại $H \Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$	0,25
		$\widehat{ADM} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^\circ$	0,25
		Xét tứ giác $ADMH$ có $\widehat{AHM} + \widehat{ADM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$	0,25
		Mà \widehat{AHM} và \widehat{ADM} là 2 góc đối nhau.	
		Vậy tứ giác $ADMH$ nội tiếp	
	2)	Chứng minh: $CD.CE = CH.CO$.	1,0
		Chứng minh: $\triangle CAD \sim \triangle CEA$ (gg)	0,25
		$\Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow CA^2 = CD.CE$ (1)	0,25
		Chứng minh: $CA^2 = CH.CO$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD.CE = CH.CO$	0,25
		3.1) Chứng minh: $\widehat{EHD} = 2.\widehat{EBD}$	0,5
		Chứng minh: Tứ giác $DHEO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{DOE}$ (3)	0,25
		Chứng minh: $\widehat{EBD} = \frac{1}{2}\widehat{EOD}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{EBD} = \frac{1}{2}\widehat{EHD} \Rightarrow \widehat{EHD} = 2.\widehat{EBD}$ (đpcm)		
3)	3.2) Chứng minh ba điểm E, O, F thẳng hàng.	0,5	
	Chứng minh: $\widehat{DAM} = \widehat{CHD}$ (vì tứ giác $ADMH$ nội tiếp) (5)		
	Trong đường tròn (O) có $\widehat{DAM} = \widehat{CEF}$ (6)	0,25	
	Mà $\widehat{CHD} = 180^\circ - \widehat{DHO} = \widehat{CEO}$ (7)		
	Từ (5), (6) và (7) suy ra $\widehat{CEO} = \widehat{CEF}$		
	Do đó tia EO và tia EF là hai tia trùng nhau Vậy ba điểm E, O, F thẳng hàng.	0,25	

	<p>Bài V (0,5 điểm)</p> <p>Giải phương trình $5x + 45 + 4\sqrt{5-x} = 8\sqrt{x-1} + 18\sqrt{x+4}$.</p>	0,5
Bài V <i>0,5 điểm</i>	<p>ĐKXĐ $1 \leq x \leq 5$.</p> $5x + 45 + 4\sqrt{5-x} = 8\sqrt{x-1} + 18\sqrt{x+4}$ $\Leftrightarrow 5x + 45 + 4\sqrt{5-x} - 8\sqrt{x-1} - 18\sqrt{x+4} = 0$ $\Leftrightarrow 2x + 6 - 8\sqrt{x-1} + 3x + 39 - 18\sqrt{x+4} + 4\sqrt{5-x} = 0$ $\Leftrightarrow 2(x-1+4-4\sqrt{x-1}) + 3(x+4+9-6\sqrt{x+4}) + 4\sqrt{5-x} = 0$ $\Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-2)^2 + 3(\sqrt{x+4}-3)^2 + 4\sqrt{5-x} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-2)^2 = 3(\sqrt{x+4}-3)^2 = 4\sqrt{5-x} = 0$ $\Leftrightarrow x = 5.$ <p>Ta thấy $x = 5$ (thỏa mãn ĐKXĐ).</p> <p>Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{5\}$.</p>	0,25