

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 17 tháng 5 năm 2024

(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu 1: (2,0 điểm). Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{12}{x-4}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$).

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tìm x để $P = \frac{2}{3}$.

Câu 2: (2,0 điểm).

1) Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng (d). Tìm a, b biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 2x - 2024$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

Câu 3: (2,0 điểm).

1) Giải phương trình: $3x^2 + 2x - 5 = 0$

2) Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x - 2m = 0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức: $x_2 - x_1 = x_1^2$.

Câu 4: (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$, điểm M cố định nằm ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MCD bất kì không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D, B thuộc cung nhỏ CD). Gọi K là trung điểm của CD .

1) Chứng minh tứ giác $MAOK$ nội tiếp đường tròn.

2) Gọi E là giao điểm của tia BK với đường tròn (O) . Chứng minh AE vuông góc với OK .

3) Tìm vị trí của cát tuyến MCD để diện tích tam giác MDE đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{3a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{3b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{3c^2}{5c^2 + (a+b)^2}$$

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

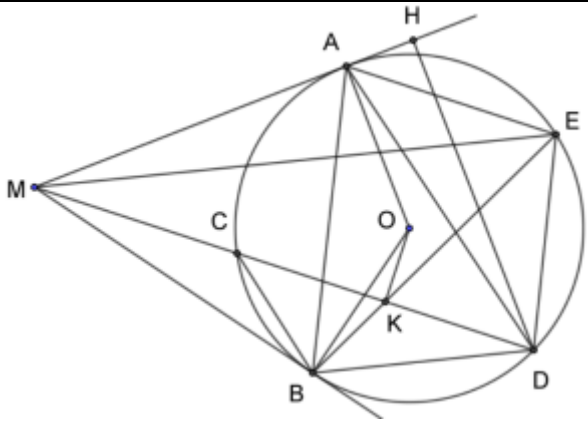
Ghi chú : Học sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có bộ nhớ văn bản.

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ KHẢO SÁT MÔN TOÁN KHỐI 9

Năm học: 2023 - 2024

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
I	$1) P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{12}{x-4}$ $= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2)+3(\sqrt{x}+2)-12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$ $= \frac{x-4\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}+6-12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$ $= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$	0,25 đ
	$= \frac{x-4\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}+6-12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25 đ
	$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$	0,25 đ
	<p>Vậy $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$</p>	0,25 đ
	<p>2) Để $P = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x}+3 = 2\sqrt{x}+4 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ (TMĐK)</p> <p>Vậy $x = 1$ thì $P = \frac{2}{3}$</p>	0,75 đ
		0,25 đ
II	<p>1) Do đường thẳng (d): $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 2x - 2024$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq -2024 \end{cases}$</p> <p>Khi đó hàm số trở thành: $y = 2x + b$</p> <p>Do đồ thị hàm số $y = 2x + b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 nên thay $x = 3; y = 0$ vào hàm số ta được: $0 = 2.3 + b \Rightarrow b = -6$ (TM)</p> <p>Vậy $a = 2; b = -6$ là giá trị cần tìm.</p>	0,25 đ
		0,25 đ
	<p>2) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = 7 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$</p> <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -1)$</p>	0,75 đ
		0,25 đ
III	<p>1) $3x^2 + 2x - 5 = 0$</p> <p>Ta có: $a = 3; b = 2; c = -5$</p> <p>Nhận thấy: $a + b + c = 3 + 2 + (-5) = 0$</p> <p>Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{5}{3}$</p>	0,5 đ
		0,5 đ
	<p>2) $x^2 - 2(m-2)x - 2m = 0$</p> <p>Ta có: $\Delta' = [-(m-2)]^2 - 1 \cdot (-2m) = m^2 - 4m + 4 + 2m = m^2 - 2m + 4 = (m-1)^2 + 3 > 0$ với mọi m.</p> <p>Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m</p> <p>Theo hệ thức Vi - ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 x_2 = -2m \end{cases}$</p>	0,25 đ

	<p>Khi đó: $x_2 - x_1 = x_1^2 \Rightarrow x_2 = x_1^2 + x_1$ (1) với $x_2 > x_1$</p> <p>Lại có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 x_2 = -2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 4 \\ x_1 x_2 = -2m \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -4$ (2)</p> <p>Thay (1) vào (2) ta được: $x_1 + x_1^2 + x_1 + x_1(x_1^2 + x_1) = -4$ $\Rightarrow x_1^3 + 2x_1^2 + 2x_1 + 4 = 0 \Rightarrow (x_1 + 2)(x_1^2 + 2) = 0$ $\Rightarrow x_1 = -2$ (do $x_1^2 + 2 > 0$)</p> <p>Thay $x_1 = -2$ vào (1) ta được: $x_2 = 2$</p> <p>Do $x_1 x_2 = -2m \Rightarrow -2m = -4 \Leftrightarrow m = 2$ Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.</p>	<p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p>
		
IV	<p>1) Vì MA là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) nên $OA \perp MA \Rightarrow \widehat{OAM} = 90^\circ$ Xét (O) có K là trung điểm của dây CD không đi qua tâm $\Rightarrow \widehat{OKM} = 90^\circ$ (Định lý đường kính và dây cung) Xét tứ giác $MAOK$ có: $\widehat{MAO} + \widehat{OKM} = 180^\circ$. Mà hai góc này ở vị trí đối nhau \Rightarrow Tứ giác $MAOK$ nội tiếp một đường tròn (đpcm)</p>	<p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p>
	<p>2) Xét tứ giác $MAOB$ có: $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$ mà hai góc đó ở vị trí đối nhau \Rightarrow Tứ giác $MAOB$ nội tiếp. Và tứ giác $MAOK$ nội tiếp (theo phần 1) nên 5 điểm A, B, M, O, K cùng thuộc 1 đường tròn \Rightarrow Tứ giác $MAKB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BAM}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung MB). Mà: $\widehat{BAM} = \widehat{BEA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn \widehat{AB}). Do đó: $\widehat{BKM} = \widehat{BEA}$, hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AE \parallel MK$. Ta lại có $OK \perp MK \Rightarrow AE \perp OK$ (đpcm)</p>	<p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p>
	<p>3) Do $AE \parallel MD \Rightarrow S_{\Delta MDE} = S_{\Delta MDA}$ Gọi H là hình chiếu của D trên tia MA. Khi đó $S_{\Delta MDA} = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot MA$. Do MA không đổi nên $S_{\Delta MDA}$ lớn nhất $\Leftrightarrow DH$ lớn nhất. Mà: $DH \leq DA$ (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc), lại có DA là</p>	<p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p>

	<p>dây cung của đường tròn $(O) \Rightarrow DA \leq 2R$. Suy ra $DH \leq 2R$.</p> <p>Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow DA$ là đường kính của (O) hay D là điểm đối xứng với A qua O.</p> <p>Vậy để $S_{\Delta MDE}$ lớn nhất \Leftrightarrow Cát tuyến MCD đi qua điểm đối xứng với A qua tâm O.</p>	<p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p>
<p>V</p>	<p>Áp dụng BĐT: với a, b là các số thực, và x, y là các số dương thì $\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$, dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$</p> <p>Ta có: $\frac{9a^2}{5a^2 + (b+c)^2} = \frac{(a+2a)^2}{(a^2 + b^2 + c^2) + 2(2a^2 + bc)} \leq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2a^2}{2a^2 + bc}$</p> <p>Tương tự ta có: $\frac{9b^2}{5b^2 + (c+a)^2} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca}$ $\frac{9c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab}$</p> <p>Cộng vế với vế của các BĐT ta được:</p> $3Q \leq 1 + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} = 1 + 2 \left(\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \right)$ <p>Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$</p> <p>Đặt: $A = \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}$.</p> <p>Ta có:</p> $\frac{3}{2} - A = \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2b^2 + ca} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{2c^2 + ab} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{(bc)^2}{(bc)^2 + 2ab.ac} + \frac{(ca)^2}{(ca)^2 + 2bc.ab} + \frac{(ab)^2}{(ab)^2 + 2ca.bc} \right)$ <p>Lại có:</p> $\frac{(bc)^2}{(bc)^2 + 2ab.ac} + \frac{(ca)^2}{(ca)^2 + 2bc.ab} + \frac{(ab)^2}{(ab)^2 + 2ca.bc} \geq \frac{(bc + ca + ab)^2}{(bc + ac + ab)^2} = 1$ <p>Nên $\frac{3}{2} - A \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq 1 \Rightarrow 3Q \leq 3 \Rightarrow Q \leq 1$</p> <p>Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là $Q = 1$</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.</p>	<p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25 đ</p>