

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
ĐỀ THI CHÍNH THỨC NĂM HỌC 2019 - 2020

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 27/12/2019

Bài 1 (5,0 điểm).

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = 0$.

b) Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{x_n}$.

Bài 2 (5,0 điểm).

a) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \leq 2\sqrt{2}.$$

b) Cho 2019 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2019}^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2018} - a_{2019}| + |a_{2019} - a_1|.$$

Bài 3 (5,0 điểm).

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ và $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

a) Chứng minh rằng hai số hạng liên tiếp của dãy trên nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của a_{2^k} thì $(p-1)$ chia hết cho 2^{k+1} với mọi số tự nhiên k .

Bài 4 (5,0 điểm).

Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của O qua các đường thẳng BC, CA, AB .

a) Gọi H_0 là điểm đối xứng của H qua BC , A' là điểm đối xứng của A qua O và O_0 là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC . Chứng minh rằng H_0D và O_0A' cắt nhau trên (O) .

b) Lấy điểm X sao cho tứ giác $AXDA'$ là hình bình hành. Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHX, ABF và ACE có một điểm chung thứ hai khác A .

----- HẾT -----

- Thi sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2019 - 2020

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 28/12/2019

Bài 5 (6,0 điểm).

Cho hệ phương trình với tham số a :

$$\begin{cases} x - ay = yz \\ y - az = zx \\ z - ax = xy \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

- Giải hệ phương trình khi $a = 0$.
- Chứng minh rằng hệ trên có 5 nghiệm phân biệt với mọi số thực $a > 1$.

Bài 6 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn không cân. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC . Đường tròn đường kính AD cắt lại DE, DF lần lượt tại M, N . Lấy các điểm P, Q tương ứng trên AB, AC sao cho NP vuông góc AB , MQ vuông góc AC . Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ .

- Chứng minh rằng (I) tiếp xúc với EF .
- Gọi T là tiếp điểm của (I) với EF , DT cắt MN tại K . Gọi L là điểm đối xứng của A qua MN . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DKL đi qua giao điểm của EF và MN .

Bài 7 (7,0 điểm).

Cho số nguyên dương $n > 1$. Ký hiệu T là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự (x, y, z) , trong đó x, y, z là các số nguyên dương đôi một khác nhau và $1 \leq x, y, z \leq 2n$. Một tập hợp A các bộ có thứ tự (u, v) được gọi là liên kết với T nếu với mỗi phần tử $(x, y, z) \in T$ thì $\{(x, y), (x, z), (y, z)\} \cap A \neq \emptyset$.

- Tính số phần tử của T .
- Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp liên kết với T có đúng $2n(n-1)$ phần tử.
- Chứng minh rằng mỗi tập hợp liên kết với T có không ít hơn $2n(n-1)$ phần tử.

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.